6. Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Ερωτήσεις Θεωρίας

6.1 Ποια είναι η επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής αx+β = 0, με α, β πραγματικούς αριθμούς;

Απάντηση:

Η επίλυση κάθε εξίσωσης που έχει τη μορφή $\alpha x+\beta=0$, συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:

Η Εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ *(1)*	
Αν $\alpha\neq 0$	*Η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση* $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.
Αν $\alpha=0$ *και* $\beta\neq 0$	*Η εξίσωση (1) γράφεται* $0x=-\beta$ *και είναι αδύνατη.*
Αν $\alpha=0$ *και* $\beta=0$	*Η εξίσωση (1) γράφεται* $0x=0$ *και είναι ταυτότητα.*

Για παράδειγμα:

1. Για την εξίσωση $5(2-x)=x-2$ έχουμε:

$$5(2-x)=x-2 \Leftrightarrow 10-5x=x-2 \Leftrightarrow 10+2=5x+x \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow$$

$\dfrac{6x}{6}=\dfrac{12}{6} \Leftrightarrow x=2$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x=2$.

2. Για την εξίσωση $3(x+2)-2x=x+9$ έχουμε:

$3(x+2)-2x=x+9 \Leftrightarrow 3x+6-2x=x+9 \Leftrightarrow 3x-2x-x=9-6 \Leftrightarrow$

$0x=3$. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

$\boxed{3.}$ Για την εξίσωση $\dfrac{3x-7}{2}-x=\dfrac{x-7}{2}$ έχουμε:

$$\frac{3x-7}{2}-x=\frac{x-7}{2} \overset{\text{ΕΚΠ}=2}{\Leftrightarrow} 2\cdot\frac{(3x-7)}{2}-2x=2\cdot\frac{(x-7)}{2} \Leftrightarrow$$

$3x-7-2x=x-7 \Leftrightarrow 3x-2x-x=7-7 \Leftrightarrow 0x=0$. Άρα η εξίσωση είναι ταυτότητα.

<u>Σχόλια:</u>

1. *Ονομάζουμε* ***λύση*** *ή* ***ρίζα*** *μιας εξίσωσης κάθε αριθμό που την επαληθεύει.*

2. *Αν οι συντελεστές α και β της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων , τότε τα γράμματα λέγονται* ***παράμετροι*** *, η εξίσωση* ***παραμετρική*** *και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται* ***διερεύνηση****.*

Για παράδειγμα η εξίσωση: $(\lambda^2-\lambda)x=\lambda^2-1,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Έχει παράμετρο το λ και γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda^2-\lambda)x=\lambda^2-1 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Επομένως

- *Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την*

$$x=\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{\lambda+1}{\lambda}$$

- *Αν $\lambda=0$, η εξίσωση γίνεται $0x=-1$ και είναι αδύνατη.*
- *Αν $\lambda=1$, η εξίσωση γίνεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.*

6.2 Ποιες είναι οι βασικές κατηγορίες εξισώσεων που με κατάλληλη διαδικασία ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού;

Απάντηση:

1^{η} Κατηγορία: Εξισώσεις με παραγοντοποίηση

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \;\; ή \;\; \beta = 0$$

Για παράδειγμα για την εξίσωση $x^2(x-3) = x(x-3)$ έχουμε:

$$x^2(x-3) = x(x-3) \Leftrightarrow x^2(x-3) - x(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x)(x-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \;\; ή \;\; x-1 = 0 \;\; ή \;\; x-3 = 0) \Leftrightarrow$$

$$(x = 0 \;\; ή \;\; x = 1 \;\; ή \;\; x = 3).$$

2^{η} Κατηγορία: Κλασματικές εξισώσεις

Παρονομαστές κλασμάτων $\neq 0$

Για παράδειγμα για την εξίσωση $\frac{x^2+1}{x} - 1 = \frac{1}{x}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^2+1}{x} - 1 = \frac{1}{x} \overset{ΕΚΠ=x}{\Leftrightarrow} x \cdot \frac{(x^2+1)}{x} - x \cdot 1 = x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 - x = 1 \Leftrightarrow$$

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, αφού $x \neq 0$.

3^{η} Κατηγορία: Εξισώσεις της μορφής

$$|f(x)| = |g(x)|$$

Για παράδειγμα για την εξίσωση $|3x-5| = |x-7|$ έχουμε:

$$|3x-5| = |x-7| \Leftrightarrow 3x - 5 = x - 7 \;\; ή \;\; 3x - 5 = -(x-7)$$

► $3x-5=x-7 \Leftrightarrow 3x-x=5-7 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$.

► $3x-5=-(x-7) \Leftrightarrow 3x-5=-x+7 \Leftrightarrow 3x+x=5+7 \Leftrightarrow 4x=12 \Leftrightarrow$
$x=3$.

4$^{\eta}$ Κατηγορία: Εξισώσεις της μορφής $|f(x)|=g(x)$

Παίρνουμε τον περιορισμό $g(x)\geq 0$

Για παράδειγμα για την εξίσωση $|4x-5|=5x-4$ εργαζόμαστε ως εξής:

Η εξίσωση έχει λύση για κάθε $5x-4\geq 0$ (**1**). Με αυτόν τον

περιορισμό έχουμε:

$|4x-5|=5x-4 \Leftrightarrow 4x-5=5x-4$ ή $4x-5=-(5x-4)$

► $4x-5=5x-4 \Leftrightarrow 4-5=5x-4x \Leftrightarrow x=-1$

► $4x-5=-(5x-4) \Leftrightarrow 4x-5=-5x+4 \Leftrightarrow 4x+5x=5+4 \Leftrightarrow 9x=9$

$\Leftrightarrow x=1$. Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x=1$, γιατί

μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό (**1**).

5$^{\eta}$ Κατηγορία: Εξισώσεις της μορφής $|f(x)|+|g(x)|+h(x)=0$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων των $f(x)$ και $g(x)$

Για παράδειγμα για την εξίσωση $|x-1|+|x-2|-3x=0$ (**1**) εργαζόμαστε ως εξής:

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων των $x-1$ και $x-2$.

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$

► Για $x<1$, τότε η **(1)** γίνεται $-(x-1)-(x-2)-3x=0 \Leftrightarrow$

$-x+1-x+2-3x=0 \Leftrightarrow -5x+3=0 \Leftrightarrow 5x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$, δεκτή.

► Για $1\le x<2$, τότε η **(1)** γίνεται $(x-1)-(x-2)-3x=0 \Leftrightarrow$

$x-1-x+2-3x=0 \Leftrightarrow -3x+1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$, απορρίπτεται.

► Για $x\ge 2$, τότε η **(1)** γίνεται $x-1+x-2-3x=0 \Leftrightarrow$

$-x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$, απορρίπτεται.

6η Κατηγορία: Εξισώσεις της μορφής $|f(x)|+|g(x)|=0$

Αξιοποιούμε την ιδιότητα $|\alpha|+|\beta|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$

και έχουμε $f(x)=0$ και $g(x)=0$.

Για παράδειγμα για την εξίσωση $|x^2-2x|+|x^2-4|=0$ έχουμε:

$$x^2-2x=0 \text{ και } x^2-4=0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2)=0 \text{ και } (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x=0 \text{ ή } x=2) \text{ και } (x=-2 \text{ ή } x=2) \Leftrightarrow$$

$$x=2.$$

Άρα η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η $x=2$.

6.3 **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

α) $4x-3(2x-1)=7x-42$ **β)** $\frac{1-4x}{5}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-4}{20}+\frac{5}{4}$

Λύση:

α) Έχουμε:

$$4x-3(2x-1)=7x-42 \Leftrightarrow 4x-6x+3=7x-42 \Leftrightarrow 4x-6x-7x=-3-42$$

$\Leftrightarrow -9x=-45 \Leftrightarrow x=\frac{-45}{-9} \Leftrightarrow x=5$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=5$.

β) Έχουμε:

$$\frac{1-4x}{5}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-4}{20}+\frac{5}{4} \overset{\text{ΕΚΠ}=20}{\Leftrightarrow} 20\cdot\frac{(1-4x)}{5}-20\cdot\frac{(x+1)}{4}=20\cdot\frac{(x-4)}{20}+20\cdot\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(1-4x)-5(x+1)=x-4+25 \Leftrightarrow 4-16x-5x-5=x-4+25$$

$$\Leftrightarrow -16x-5x-x=-4-4+25+5 \Leftrightarrow -22x=22 \Leftrightarrow x=\frac{22}{-22}$$

$\Leftrightarrow x=-1$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=-1$.

6.4 **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

α) $2(3x-1)-3(2x-1)=4$ **β)** $2x-\frac{5-x}{3}=-\frac{5}{3}+\frac{7x}{3}$

Λύση:

α) Έχουμε:

$$2(3x-1)-3(2x-1)=4 \Leftrightarrow 6x-2-6x+3=4 \Leftrightarrow 6x-6x=4-3+2$$

$\Leftrightarrow 0x=3$. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

β) Έχουμε:

$$2x-\frac{5-x}{3}=-\frac{5}{3}+\frac{7x}{3}\overset{\text{ΕΚΠ}=3}{\Leftrightarrow}3\cdot 2x-3\cdot\frac{(5-x)}{3}=-3\cdot\frac{5}{3}+3\cdot\frac{7x}{3}\Leftrightarrow$$

$$6x-(5-x)=-5+7x\Leftrightarrow 6x-5+x=-5+7x\Leftrightarrow 6x+x-7x=-5+5\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0x=0$. Άρα η εξίσωση είναι ταυτότητα.

6.5 Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{2x}{51}+\frac{3(x+2)}{53}=5\ (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) για $x=51$ η εξίσωση (1) δεν είναι αδύνατη

β) για $x=0$ η εξίσωση (1) δεν είναι ταυτότητα

γ) η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την οποία να προσδιορίσετε.

Λύση:

α) Για $x=51$ από την **(1)** έχουμε:

$\frac{2\cdot 51}{51}+\frac{3(51+2)}{53}=5\Leftrightarrow\frac{2\cdot 51}{51}+\frac{3\cdot 53}{53}=5\Leftrightarrow 2+3=5$, που ισχύει. Άρα η εξίσωση **(1)** έχει μία λύση, δηλαδή δεν είναι αδύνατη.

β) Για $x=0$ από την **(1)** έχουμε:

$$\frac{2\cdot 0}{51}+\frac{3(0+2)}{53}=5\Leftrightarrow\frac{2\cdot 0}{51}+\frac{3\cdot 6}{53}=5$$

$0+\frac{18}{53}=5\Leftrightarrow\frac{18}{53}=5$, που δεν ισχύει.

Άρα η εξίσωση **(1)** δεν είναι ταυτότητα.

γ) Επειδή η εξίσωση **(1)** είναι 1ου βαθμού και δεν είναι αδύνατη ούτε ταυτότητα, άρα θα έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x=51$.

Σχόλιο:

Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0\ (1)$

- *Αν $\alpha\neq 0$, τότε $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$*
- *Αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$, τότε η (1) είναι αδύνατη*
- *Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$, τότε η (1) είναι ταυτότητα.*

6.6 Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) $\boldsymbol{\lambda(\lambda-1)x=\lambda-1}$ **β)** $\boldsymbol{\lambda(\lambda-1)x=\lambda^2+\lambda}$

Λύση:

α) Έχουμε: $\lambda(\lambda-1)x=\lambda-1$ **(1)**

• Αν $\lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ *και* $\lambda\neq 1$, τότε η εξίσωση **(1)** έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{1}{\lambda}$$

• Αν $\lambda=0$, τότε η εξίσωση **(1)** γίνεται $0x=-1$, που είναι αδύνατη.

• Αν $\lambda=1$, τότε η εξίσωση **(1)** γίνεται $0x=0$, που είναι ταυτότητα.

β) Έχουμε: $\lambda(\lambda-1)x=\lambda^2+\lambda$ **(2)**

• Αν $\lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ *και* $\lambda\neq 1$, τότε η εξίσωση **(2)** έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{\lambda^2+\lambda}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$$

• Αν $\lambda=0$, τότε η εξίσωση **(2)** γίνεται $0x=0$, που είναι ταυτότητα.

• Αν $\lambda=1$, τότε η εξίσωση **(2)** γίνεται $0x=2$, που είναι αδύνατη.

6.7 Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση για όλες τις τιμές του $\boldsymbol{\alpha\in\mathbb{R}}$.

$$\frac{x+\alpha}{x-\alpha}=\frac{x^2}{x^2-\alpha^2}$$

Λύση:

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x\neq\alpha$ και $x\neq-\alpha$.

Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ οπότε έχουμε:

$$\frac{x+\alpha}{x-\alpha}=\frac{x^2}{(x-\alpha)(x+\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$(x-\alpha)(x+\alpha)\frac{x+\alpha}{x-\alpha}=(x-\alpha)(x+\alpha)\frac{x^2}{(x-\alpha)(x+\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$(x+\alpha)^2=x^2\Leftrightarrow x^2+2\alpha x+\alpha^2=x^2\Leftrightarrow 2\alpha x=-\alpha^2\,\mathbf{(1)}.$$

● Αν $2\alpha\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq 0$, τότε η εξίσωση **(1)** έχει μοναδική λύση την

$x=-\dfrac{\alpha^2}{2\alpha}=-\dfrac{\alpha}{2}$, που ικανοποιεί τους περιορισμούς $x\neq\alpha$ και $x\neq-\alpha$.

● Αν $2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=0$, τότε η εξίσωση **(1)** γίνεται $0x=0$, που είναι ταυτότητα. Αυτό σημαίνει ότι έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό $x\neq 0$.

6.8 **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

α) $\boldsymbol{x^2(x-4)+2x(x-4)+(x-4)=0}$

β) $\boldsymbol{(x-2)^2-(2-x)(4+x)=0}$

Λύση:

α) Παραγοντοποιούμε το 1ο μέλος της εξίσωσης οπότε έχουμε:

$$x^2(x-4)+2x(x-4)+(x-4)=0\Leftrightarrow(x-4)(x^2+2x+1)=0\Leftrightarrow$$

$(x-4)(x+1)^2=0\Leftrightarrow$

$x-4=0$ ή $x+1=0\Leftrightarrow$

$x=4$ ή $x=-1$.

Σχόλιο:

Αξιοποιούμε την ιδιότητα:

$\alpha\beta=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\beta=0$

β) Παραγοντοποιούμε το 1ο μέλος της εξίσωσης οπότε έχουμε:

$$(x-2)^2-(2-x)(4+x)=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(x-2)(x+4)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left[(x-2)+(x+4)\right]=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2+x+4)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(2x+2)=0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$x-2=0 \text{ ή } x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=2 \text{ ή } x=-1.$$

6.9 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3-2x^2-x+2=0$ **β)** $x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0$

Λύση:

α) Παραγοντοποιούμε το 1ο μέλος της εξίσωσης οπότε έχουμε:

$$x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$x-2=0 \text{ ή } x-1=0 \text{ ή } x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

β) Παραγοντοποιούμε το 1ο μέλος της εξίσωσης οπότε έχουμε:

$$x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)-(2x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left[x^2-(2x-1)\right]=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$x-2=0 \text{ ή } x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=2 \text{ ή } x=1.$$

6.10 **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

α) $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-x}$ β) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$

γ) $\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x}=\frac{x-4}{x^2+2x}$ δ) $\frac{x}{x+1}-\frac{8}{x}=1$

Λύση:

α) Είναι $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-x}\Leftrightarrow\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)}$.

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x\neq 0$ και $x\neq 1$.

Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ οπότε έχουμε:

$$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)}\Leftrightarrow x(x-1)\frac{x}{x-1}=x(x-1)\frac{1}{x(x-1)}\Leftrightarrow x^2=1$$

Επειδή $x\neq 1$, θα είναι $x=-1$.

β) Είναι $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$.

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x\neq -1$ και $x\neq 1$.

Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}\Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x+1)\frac{1}{x-1}+(x-1)(x+1)\frac{1}{x+1}=(x-1)(x+1)\frac{2}{(x-1)(x+1)}\Leftrightarrow$$

$x+1+x-1=2\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$, που απορρίπτεται. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) Είναι $\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x}=\frac{x-4}{x^2+2x}\Leftrightarrow\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x}=\frac{x-4}{x(x+2)}$.

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x\neq 0$ και $x\neq -2$.

Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ οπότε έχουμε:

$$\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x}=\frac{x-4}{x(x+2)}\Leftrightarrow$$

$$x(x+2)\frac{3}{x+2}-x(x+2)\frac{2}{x}=x(x+2)\frac{x-4}{x(x+2)}\Leftrightarrow$$

$3x-2(x+2)=x-4\Leftrightarrow 3x-2x-4=x-4\Leftrightarrow 3x-2x-x=4-4\Leftrightarrow 0x=0$ που είναι ταυτότητα. Άρα η εξίσωση έχει ως λύση κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από τους αριθμούς -2 και 0.

δ) Είναι $\frac{x}{x+1}-\frac{8}{x}=1$.

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x\neq -1$ και $x\neq 0$.

Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ οπότε έχουμε:

$$\frac{x}{x+1}-\frac{8}{x}=1\Leftrightarrow x(x+1)\frac{x}{x+1}-x(x+1)\frac{8}{x}=x(x+1)\Leftrightarrow$$

$$x^2-8(x+1)=x(x+1)\Leftrightarrow x^2-8x-8=x^2+x\Leftrightarrow -8x-x=8\Leftrightarrow$$

$-9x=8\Leftrightarrow x=-\frac{8}{9}$, που ικανοποιεί τους περιορισμούς.

Άρα η εξίσωση έχει λύση τον αριθμό $x=-\frac{8}{9}$.

6.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x-3|=5$ **β)** $|2x-4|=|x-1|$

γ) $|x-2|=2x-1$ **δ)** $|2x-1|=x-2$

Λύση:

α) Έχουμε:

$|2x-3|=5\Leftrightarrow$

Σχόλιο:

Αξιοποιούμε την ιδιότητα:

$|x|=\theta\Leftrightarrow(x=\theta \text{ ή } x=-\theta),\ \theta>0$

και έχουμε:

$|f(x)|=\theta\Leftrightarrow(f(x)=\theta \text{ ή } f(x)=-\theta),\ \theta>0$

$\left(2x-3=5 \ \text{ή} \ 2x-3=-5\right) \Leftrightarrow \left(2x=8 \ \text{ή} \ 2x=-2\right) \Leftrightarrow$

$\left(x=4 \ \ \text{ή} \ x=-1\right)$.

β) $|2x-4|=|x-1| \Leftrightarrow$

Σχόλιο:

Αξιοποιούμε την ιδιότητα:

$|x|=|\alpha| \Leftrightarrow \left(x=\alpha \ \ \text{ή} \ \ x=-\alpha\right)$

και έχουμε:

$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=g(x) \ \ \text{ή} \ \ f(x)=-g(x)$

$\left(2x-4=x-1 \ \text{ή} \ 2x-4=-x+1\right) \Leftrightarrow$

$\left(2x-x=4-1 \ \text{ή} \ 2x+x=4+1\right) \Leftrightarrow \left(x=3 \ \text{ή} \ 3x=5\right) \Leftrightarrow$

$$\left(x=3 \ \text{ή} \ x=\frac{5}{3}\right)$$

γ) Η εξίσωση $|x-2|=2x-1$ έχει λύση για κάθε $2x-1 \geq 0$ **(1)**. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$|x-2|=2x-1 \Leftrightarrow x-2=2x-1 \ \text{ή} \ x-2=-\left(2x-1\right)$$

► $x-2=2x-1 \Leftrightarrow 1-2=2x-x \Leftrightarrow x=-1$

► $x-2=-\left(2x-1\right) \Leftrightarrow x-2=-2x+1 \Leftrightarrow x+2x=2+1 \Leftrightarrow 3x=3$

$\Leftrightarrow x=1$. Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x=1$, γιατί μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό **(1)**.

δ) Η εξίσωση $|2x-1|=x-2$ έχει λύση για κάθε $x-2 \geq 0$ **(2)**. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$|2x-1|=x-2 \Leftrightarrow 2x-1=x-2 \ \text{ή} \ 2x-1=-\left(x-2\right)$$

► $2x-1=x-2 \Leftrightarrow 2x-x=1-2 \Leftrightarrow x=-1$

► $2x-1=-(x-2)\Leftrightarrow 2x-1=-x+2\Leftrightarrow 2x+x=1+2\Leftrightarrow 3x=3$

$\Leftrightarrow x=1$. Από τις παραπάνω λύσεις καμία δεν είναι δεκτή γιατί δεν ικανοποιούν τον περιορισμό **(2).** Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

6.12 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{|x|+4}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}$ **β)** $\frac{2|x|+1}{3}-\frac{|x|-1}{2}=\frac{1}{2}$

Λύση:

α) Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ οπότε έχουμε:

$$\frac{|x|+4}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 15\cdot\frac{(|x|+4)}{3}-15\cdot\frac{(|x|+4)}{5}=15\cdot\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$5(|x|+4)-3(|x|+4)=10\Leftrightarrow 5|x|+20-3|x|-12=10\Leftrightarrow$$

$$5|x|-3|x|=10-20+12\Leftrightarrow 2|x|=2\Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow x=1 \;\; ή \;\; x=-1.$$

β) Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ οπότε έχουμε:

$$\frac{2|x|+1}{3}-\frac{|x|-1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 6\cdot\frac{(2|x|+1)}{3}-6\cdot\frac{(|x|-1)}{2}=6\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$2(2|x|+1)-3(|x|-1)=3\Leftrightarrow 4|x|+2-3|x|+3=3\Leftrightarrow$$

$4|x|-3|x|=3-3-2\Leftrightarrow |x|=-2$, που είναι αδύνατη, γιατί $|x|\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6.13 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\left|\frac{3-x}{3+x}\right|=4$ **β)** $|x-1|\cdot|x-3|=|x-1|$

Λύση:

α) Η εξίσωση $\left|\frac{3-x}{3+x}\right|=4$, ορίζεται για κάθε $x\neq -3$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\left|\frac{3-x}{3+x}\right|=4 \Leftrightarrow \frac{|3-x|}{|3+x|}=4 \Leftrightarrow |3-x|=4|3+x| \Leftrightarrow$$

$$3-x=4(3+x) \quad ή \quad 3-x=-4(3+x) \Leftrightarrow$$

$$3-x=12+4x \quad ή \quad 3-x=-12-4x \Leftrightarrow$$

$$-x-4x=12-3 \quad ή \quad -x+4x=-12-3 \Leftrightarrow$$

$$-5x=9 \quad ή \quad 3x=-15 \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{9}{5} \quad ή \quad x=-5.$$

Οι λύσεις που βρήκαμε είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τον περιορισμό $x \neq -3$.

β) Έχουμε: $|x-1|\cdot|x-3|=|x-1| \Leftrightarrow |x-1|\cdot|x-3|-|x-1|=0 \Leftrightarrow$

$$|x-1|(|x-3|-1)=0 \Leftrightarrow |x-1|=0 \quad ή \quad |x-3|-1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \quad ή \quad |x-3|=1 \Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x-3=1 \quad ή \quad x-3=-1 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \quad ή \quad x=4 \quad ή \quad x=2.$$

6.14 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\left|2|x|-1\right|=3$ **β)** $\sqrt{x^2-2x+1}=|3x-5|$.

Λύση:

α) Έχουμε: $\left|2|x|-1\right|=3 \Leftrightarrow 2|x|-1=3 \quad ή \quad 2|x|-1=-3 \Leftrightarrow$

$$2|x|=4 \quad ή \quad 2|x|=-2 \Leftrightarrow$$

$$|x|=2 \quad ή \quad |x|=-1.$$

Επειδή η εξίσωση $|x|=-1$ είναι αδύνατη ($|x|\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$), θα έχουμε $|x|=2 \Leftrightarrow x=2 \quad ή \quad x=-2$.

β) Έχουμε: $\sqrt{x^2-2x+1}=|3x-5| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}=|3x-5| \Leftrightarrow$

$$|x-1|=|3x-5| \Leftrightarrow x-1=3x-5 \quad ή \quad x-1=-(3x-5) \Leftrightarrow$$

$$x-3x=1-5 \quad ή \quad x-1=-3x+5 \Leftrightarrow$$

$$-2x=-4 \quad ή \quad 4x=6$$

$$x=2 \quad ή \quad x=\frac{3}{2}.$$

6.15 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2+3x|+|x^2-9|=0$ **β)** $|x+2|-|x-3|=x$.

Λύση:

α) Έχουμε

$|x^2+3x|+|x^2-9|=0 \Leftrightarrow x^2+3x=0 \quad και \quad x^2-9=0 \Leftrightarrow$

$x(x+3)=0 \quad και$

$(x+3)(x-3)=0 \Leftrightarrow$

$x=0 \; ή \; x+3=0 \quad και \quad x+3=0 \; ή \; x-3=0 \Leftrightarrow$

$x=0 \; ή \; x=-3 \; και \; x=-3 \; ή \; x=3$.

Σχόλιο:
Αξιοποιούμε την ιδιότητα $|\alpha|+|\beta|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ *και* $\beta=0$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $x=-3$.

β) Για να λύσουμε την εξίσωση $|x+2|-|x-3|=x$ **(1)** εργαζόμαστε ως εξής:

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων των $x+2$ και $x-3$.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$\quad$ 3	$\quad$ $+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$

► Για $x<-2$, τότε η **(1)** γίνεται $-(x+2)+(x-3)=x \Leftrightarrow$

$-x-2+x-3=x \Leftrightarrow x=-5$, που είναι δεκτή.

► Για $-2 \le x < 3$, τότε η **(1)** γίνεται $(x+2)+(x-3)=x \Leftrightarrow$

$x+2+x-3=x \Leftrightarrow x=1$, που είναι δεκτή.

► Για $x \geq 3$, τότε η **(1)** γίνεται $(x+2)-(x-3)=x \Leftrightarrow$

$x+2-x+3=x \Leftrightarrow x=5$, που είναι δεκτή.

6.16 Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{x^2+4}{|x|}=-2x \text{, με } x \neq 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (-\infty,\ 0)$,

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

Λύση:

α) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $x^2+4>0$ και $|x|>0$. Άρα $\frac{x^2+4}{|x|}>0$, δηλαδή

$-2x>0 \Leftrightarrow x<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,\ 0)$.

β) Επειδή $x<0$ θα έχουμε:

$$\frac{x^2+4}{|x|}=-2x \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{-x}=-2x \Leftrightarrow x^2+4=(-2x)(-x) \Leftrightarrow$$

$x^2+4=2x^2 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2$, γιατί $x<0$.

Ασκήσεις για λύση

6.17 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3(x-4)-2(x-1)=8-x$ β) $\frac{x+8}{4}-\frac{5x+4}{6}+x=3$.

6.18 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{3x-2}{4}-\frac{x+1}{2}-\frac{x-4}{4}=0$ β) $\frac{2x-5}{3}-\frac{x-1}{6}=\frac{x+1}{2}-1$.

6.19 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2-8x=0$ β) $(x+1)^2-3x^2-3x=0$

γ) $(x+2)(x^2-9)=4(x-3)(x+2)$ δ) $x^3-2x^2+(x-2)(6x+9)=0$.

6.20 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^3-2x^2-12x+8=0$ β) $(x-5)^2+3(2x-1)=22$

γ) $x^2(x-3)-4x(x-3)=4(3-x)$ δ) $(x-2)^3-9x+18=0$.

6.21 Δίνεται η εξίσωση:

$$(\alpha+4)x=-\alpha-x^2, \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

Αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα της εξίσωσης, να βρείτε:

α) τον αριθμό α,

β) την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

6.22 Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^2-x=0 \ (1) \quad \text{και} \quad x^2-\alpha x=x-2, \quad \alpha\in\mathbb{R} \ (2)$$

Αν μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι και ρίζα της εξίσωσης (2), τότε:

α) να βρείτε τον αριθμό α,

β) να λύσετε την εξίσωση (2).

6.23 Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{3x}{99}+\frac{5(x+1)}{170}=2 \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) για $x=33$ η εξίσωση (1) δεν είναι αδύνατη,

β) για $x=0$ η εξίσωση (1) δεν είναι ταυτότητα,

γ) η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την οποία να προσδιορίσετε.

6.24 Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) $\lambda(\lambda x-3)=x-3$

β) $\lambda(\lambda x-2)=4x+\lambda^2$

γ) $\lambda^2(x-1)=2(\lambda x-2)$

δ) $\lambda^2(x-1)=\lambda(x-3)+2$.

6.25 Δίνονται οι εξισώσεις:

$$(\lambda-1)x=\mu-2 \ (1) \quad \text{και} \quad \alpha^2(x-3)=\lambda+\mu-x, \quad \alpha\in\mathbb{R} \ (2)$$

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ την οποία να προσδιορίσετε.

6.26 Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^2(x+1)^2=\lambda^2x^2+3(2\lambda x+3)$$

α) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε εξίσωση να είναι αδύνατη.

β) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε εξίσωση να έχει άπειρες λύσεις.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει μοναδική λύση την $x=1$.

6.27 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(x+\alpha)^2+4\beta x=(x+\beta)^2+4\alpha x$$

έχει λύση για κάθε $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

6.28 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(x-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+\beta)$$

έχει λύση για κάθε $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

6.29 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x-3}{x-4}=\dfrac{x}{x-2}$ β) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x}=1$.

6.30 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{4}{x}=\dfrac{x+8}{x^2+2x}$ β) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x^2-2x}$.

6.31 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{9}{x^2-4}=\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$ β) $\dfrac{3x+1}{x^2-1}=\dfrac{x}{x^2+x}+\dfrac{2}{x-1}$.

6.32 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{10}{x^2+3x}$ β) $\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}-\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{x^2+x}{x^2-9}$.

6.33 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{|x|}{4}-\dfrac{2-|x|}{3}=|x|-\dfrac{|x|+1}{2}$ β) $\dfrac{12-3|x|}{2}+\dfrac{2|x|+2}{3}=|x|+\dfrac{7}{6}$.

γ) $|x|+\dfrac{2|x|+1}{2}=\dfrac{7|x|-3}{4}$ δ) $\dfrac{|x-1|+3}{2}-\dfrac{|x-1|-3}{6}=|1-x|$.

6.34 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|3x-2|=10$ β) $|5x-1|+2=0$

γ) $|2x-5|=|1-x|$ δ) $|3x-4|=4x-3$.

6.35 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x-3|=3|x-1|$ β) $\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|=3$

γ) $\big|3|x|+1\big|=4$ δ) $\left|\dfrac{2x}{3|x|+5}\right|=\dfrac{1}{2}$.

6.36 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2-4|=3|x+2|$ β) $2|x-3|+x^2-6x+9=0$.

6.37 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\big||x+2|-3x\big|=|2-3x|$ β) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=2|x+1|$.

6.38 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x-3|=\sqrt{x^2+3}$ β) $3|x|-1=\big||x|-x\big|$.

6.39 Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{x^2+4}{2x^2}=\frac{|x-1|}{x-1},\ \text{με } x\neq 0 \text{ και } x\neq 1 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $x\in(1,+\infty)$,

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

6.40 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x-1|-|x-2|=x+1$ β) $d(x,\ 2)+d(3,\ x)=3$.

6.41 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2-3x|+|x^2-9|=0$ β) $|x^2-1|+\sqrt{x^3+x+2}=0$.

6.42 Να λύσετε για διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, τις εξισώσεις:

α) $|x-\alpha|=|x-2\alpha|$ β) $\sqrt{(x-\alpha)^2+1}=|x+\alpha|$.