8. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ερωτήσεις Θεωρίας

8.1 Τι λέγεται ταυτότητα;

Απάντηση:

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Για παράδειγμα, οι ισότητες:

$$x(x+1)=x^2+x \text{ και } x(x-2y)=x^2-2xy$$

είναι ταυτότητες γιατί αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους, ενώ οι ισότητες:

$$5x=10 \text{ και } x+y=3$$

δεν είναι ταυτότητες γιατί η $5x=10$ αληθεύει μόνο για x=2 και η $x+y=3$ δεν αληθεύει για x = 1 και y = 4.

8.2 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

β) Πως χρησιμοποιούμε την ταυτότητα για να υπολογίσουμε το τετράγωνο αθροίσματος δύο μονωνύμων;

Απάντηση:

α) Την παράσταση $(\alpha+\beta)^2$ τη γράφουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2&=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2\\&=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

β) Από την παραπάνω ταυτότητα προκύπτει ότι:

Το τετράγωνο του αθροίσματος δύο μονωνύμων, είναι ίσο με το τετράγωνο του 1ου μονωνύμου συν το διπλάσιο γινόμενο του 1ου μονωνύμου επί το 2ο μονώνυμο συν το τετράγωνο του 2ου μονωνύμου.

Δηλαδή σχηματικά έχουμε:

$$(\ldots+\ldots)^2=(\ldots)^2+2(\ldots)(\ldots)+(\ldots)^2$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^{o} & 2^{o} & 1^{o} & 1^{o} & 2^{o} & 2^{o} \end{array}$$

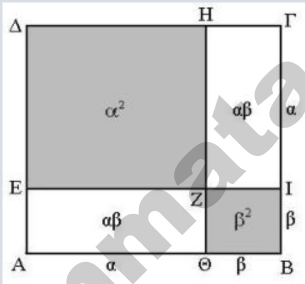
Π.χ. $(3x+2y)^2=(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2=9x^2+12xy+4y^2$

<u>Σχόλια:</u>

● *Η ταυτότητα* $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ *μετασχηματίζεται ισοδύναμα ως εξής:* $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$.

● *Γεωμετρικά η ταυτότητα αποδεικνύεται ως εξής:*

Θεωρούμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α+β του παρακάτω σχήματος:



Από το σχήμα έχουμε: $(ΑΒΓΔ)=(\alpha+\beta)^2$ *και*

$(ΑΒΓΔ)=(ΔΕΖΗ)+(ΑΘΖΕ)+(ΖΙΓΗ)+(ΘΒΙΖ)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2$

$\qquad = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Άρα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

<u>8.3</u> α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

β) Πως χρησιμοποιούμε την ταυτότητα για να υπολογίσουμε το τετράγωνο διαφοράς δύο μονωνύμων;

<u>Απάντηση:</u>

α) Την παράσταση $(\alpha-\beta)^2$ τη γράφουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2\\&=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

β) Από την παραπάνω ταυτότητα προκύπτει ότι:

Το τετράγωνο της διαφοράς δύο μονωνύμων, είναι ίσο με το τετράγωνο του 1ου μονωνύμου πλην το διπλάσιο γινόμενο του 1ου μονωνύμου επί το 2ο μονώνυμο συν το τετράγωνο του 2ου μονωνύμου. Δηλαδή σχηματικά έχουμε:

$$\underset{\substack{\uparrow\\1^{o}}}{(\ldots} - \underset{\substack{\uparrow\\2^{o}}}{\ldots)}^2 = \underset{\substack{\uparrow\\1^{o}}}{(\ldots)}^2 - 2\underset{\substack{\uparrow\\1^{o}}}{(\ldots)}\underset{\substack{\uparrow\\2^{o}}}{(\ldots)} + \underset{\substack{\uparrow\\2^{o}}}{(\ldots)}^2$$

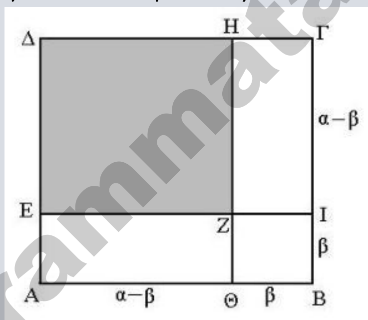
Π.χ. $\left(x^2-5x\right)^2=\left(x^2\right)^2-2\left(x^2\right)\left(5x\right)+\left(5x\right)^2=x^4-10x^3+25x^2$

Σχόλια:

● *Η ταυτότητα* $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ *μετασχηματίζεται ισοδύναμα ως εξής:* $(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$.

● *Γεωμετρικά η ταυτότητα αποδεικνύεται ως εξής:*

Θεωρούμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α του παρακάτω σχήματος:



Από το σχήμα έχουμε: $(ΔΕΖΗ)=(\alpha-\beta)^2$ *και*

$(ΔΕΖΗ)=(ΑΒΓΔ)-(ΑΒΙΕ)-(ΖΙΓΗ)=\alpha^2-\alpha\beta-\beta(\alpha-\beta)$

$\qquad=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

Άρα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

<u>8.4</u> α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\left(\alpha+\beta\right)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

β) Πως χρησιμοποιούμε την ταυτότητα για να υπολογίσουμε τον κύβο του αθροίσματος δύο μονωνύμων;

<u>Απάντηση:</u>

α) Την παράσταση $\left(\alpha+\beta\right)^3$ τη γράφουμε ως εξής:

$$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$$
$$=\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

β) Από την παραπάνω ταυτότητα προκύπτει ότι:

Ο κύβος του αθροίσματος δύο μονωνύμων, είναι ίσος με τον κύβο του 1ου μονωνύμου, συν το τριπλάσιο γινόμενο του τετραγώνου του 1ου μονωνύμου επί το 2ο , συν το τριπλάσιο γινόμενο του 1ου μονωνύμου επί το τετράγωνο του 2ου, συν τον κύβο του 2ου μονωνύμου. Δηλαδή σχηματικά έχουμε:

$$(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{...}}+\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{...}})^3=(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{...}})^3+3(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{...}})^2(\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{...}})+3(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{...}})(\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{...}})^2+(\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{...}})^3$$

Π.χ. $(2x+3y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$
$$=8x^3+3\cdot4x^2\cdot3y+3\cdot2x\cdot9y^2+27y^3$$
$$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$$

Σχόλιο:

Η ταυτότητα $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ *μετασχηματίζεται ισοδύναμα ως εξής:*

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta) \text{ ή}$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

8.5 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

β) Πως χρησιμοποιούμε την ταυτότητα για να υπολογίσουμε τον κύβο της διαφοράς δύο μονωνύμων;

Απάντηση:

α) Την παράσταση $(\alpha-\beta)^3$ τη γράφουμε ως εξής:

$$(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$$
$$=\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3$$

$$=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

β) Από την παραπάνω ταυτότητα προκύπτει ότι:

Ο κύβος της διαφοράς δύο μονωνύμων, είναι ίσος με τον κύβο του $1^{ου}$ μονωνύμου, μείον το τριπλάσιο γινόμενο του τετραγώνου του $1^{ου}$ μονωνύμου επί το $2^{ο}$, συν το τριπλάσιο γινόμενο του $1^{ου}$ μονωνύμου επί το τετράγωνο του $2^{ου}$, μείον τον κύβο του $2^{ου}$ μονωνύμου. Δηλαδή σχηματικά έχουμε:

$$\Big(\underset{\substack{\uparrow\\1^{ο}}}{\ldots}-\underset{\substack{\uparrow\\2^{ο}}}{\ldots}\Big)^3=\underset{\substack{\uparrow\\1^{ο}}}{(\ldots)}^3-3\underset{\substack{\uparrow\\1^{ο}}}{(\ldots)}^2\underset{\substack{\uparrow\\2^{ο}}}{(\ldots)}+3\underset{\substack{\uparrow\\1^{ο}}}{(\ldots)}\underset{\substack{\uparrow\\2^{ο}}}{(\ldots)}^2-\underset{\substack{\uparrow\\2^{ο}}}{(\ldots)}^3$$

Π.χ. $\left(x^2-2x\right)^3=\left(x^2\right)^3-3\left(x^2\right)^2(2x)+3\left(x^2\right)(2x)^2-(2x)^3$

$$=x^6-3\cdot x^4\cdot 2x+3\cdot x^2\cdot 4x^2-8x^3$$

$$=x^6-6x^5+12x^4-8x^3$$

<u>Σχόλιο:</u>

Η ταυτότητα $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ *μετασχηματίζεται ισοδύναμα ως εξής:*

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)\ \text{ή}$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

<u>8.6</u> α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

β) Πως χρησιμοποιούμε την ταυτότητα για να υπολογίσουμε το γινόμενο αθροίσματος δύο μονωνύμων επί τη διαφορά τους;

<u>Απάντηση:</u>

α) Είναι: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$

β) Από την παραπάνω ταυτότητα προκύπτει ότι:

Το γινόμενο του αθροίσματος δύο μονωνύμων επί τη διαφορά τους, είναι ίσο με το τετράγωνο του μειωτέου μονωνύμου της διαφοράς, μείον το τετράγωνο του αφαιρετέου μονωνύμου. Δηλαδή σχηματικά έχουμε:

$$\Big(\underset{\substack{\uparrow\\1^{ο}}}{\ldots}+\underset{\substack{\uparrow\\2^{ο}}}{\ldots}\Big)\Big(\underset{\substack{\uparrow\\1^{ο}}}{\ldots}-\underset{\substack{\uparrow\\2^{ο}}}{\ldots}\Big)=\underset{\substack{\uparrow\\1^{ο}}}{(\ldots)}^2-\underset{\substack{\uparrow\\2^{ο}}}{(\ldots)}^2$$

Π.χ. $(4x+3y)(4x-3y)=(4x)^2-(3y)^2=16x^2-9y^2$

Σχόλια:

1) *Η ταυτότητα* $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ *λέγεται και διαφορά τετραγώνων.*

2) *Κατά την εφαρμογή της ταυτότητας να προσέχουμε τη θέση των μονωνύμων στη διαφορά. Για παράδειγμα, αν έχουμε:*

$(x+4)(4-x)=4^2-x^2=16-x^2$ *και όχι* x^2-16

3) *Αν κάποιος δυσκολεύεται να εφαρμόσει την ταυτότητα, τότε ας εκτελέσει τις πράξεις. Για παράδειγμα, αν έχουμε:*

$$(-x-y)(x-y)=\begin{cases}-x^2+xy-yx+y^2=y^2-x^2,\ \text{με πράξεις}\\ \\ -\left[(x+y)(x-y)\right]=-\left(x^2-y^2\right)=y^2-x^2,\\ \text{με ταυτότητα}\end{cases}$$

8.7 α) Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3-\beta^3 \text{ και } (\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3+\beta^3$$

β) Πως χρησιμοποιούμε τις παραπάνω ταυτότητες διαφορά και άθροισμα κύβων αντίστοιχα όταν στη θέση των α, β είναι μονώνυμα;

Απάντηση:

α) Είναι:

- $(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$
- $(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+\beta^3$

β) Για τις συγκεκριμένες ταυτότητες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω σχήμα:

$$(\Delta-\bigcirc)\left(\Delta^2+\Delta\bigcirc+\bigcirc^2\right)=\Delta^3-\bigcirc^3$$

$$(\Delta+\bigcirc)\left(\Delta^2-\Delta\bigcirc+\bigcirc^2\right)=\Delta^3+\bigcirc^3$$

Όπου στη θέση του Δ βάζουμε το 1^o μονώνυμο και στη θέση του $\bigcirc$ βάζουμε το 2^o μονώνυμο.

Για παράδειγμα η παράσταση: $(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$ γίνεται:

$(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x-1)\left[(2x)^2+2x\cdot 1+1^2\right]=(2x)^3-1^3$

$=8x^3-1$, ενώ η παράσταση: $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ γίνεται:

$$(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)=(x+3y)\left[x^2-x(3y)+(3y)^2\right]=x^3+(3y)^3$$
$$=x^3+27y^3$$

Σχόλιο:

Αν κάποιος δυσκολεύεται να εφαρμόσει την ταυτότητα, τότε να εκτελέσει τις πράξεις στο 1^o μέλος και να καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα.

Ασκήσεις Λυμένες

8.8 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+3)^2$ **β)** $(y+6)^2$ **γ)** $(2x+5)^2$

δ) $(5\alpha+2\beta)^2$ **ε)** $(x^2+2x)^2$ **στ)** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

Λύση:

Με τη βοήθεια του σχήματος:

$$(\underset{\substack{\uparrow\\1^o}}{\ldots}+\underset{\substack{\uparrow\\2^o}}{\ldots})^2=(\underset{\substack{\uparrow\\1^o}}{\ldots})^2+2(\underset{\substack{\uparrow\\1^o}}{\ldots})(\underset{\substack{\uparrow\\2^o}}{\ldots})+(\underset{\substack{\uparrow\\2^o}}{\ldots})^2$$

έχουμε:

α) $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$

β) $(y+6)^2=y^2+2\cdot y\cdot 6+6^2=y^2+12y+36$

γ) $(2x+5)^2=(2x)^2+2(2x)\cdot 5+5^2=4x^2+20x+25$

δ) $(5\alpha+2\beta)^2=(5\alpha)^2+2(5\alpha)(2\beta)+(2\beta)^2=25\alpha^2+20\alpha\beta+4\beta^2$

ε) $(x^2+2x)^2=(x^2)^2+2(x^2)(2x)+(2x)^2=x^4+4x^3+4x^2$

στ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

8.9 **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

α) $(x-4)^2$ β) $(2y-1)^2$ γ) $(x-3y)^2$

δ) $(2\alpha-3\beta)^2$ ε) $(x^2-3x)^2$ στ) $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

Λύση:

Με τη βοήθεια του σχήματος:

$$\underset{1^o}{(\dots}-\underset{2^o}{\dots)}^2=\underset{1^o}{(\dots)}^2-2\underset{1^o}{(\dots)}\underset{2^o}{(\dots)}+\underset{2^o}{(\dots)}^2$$

έχουμε:

α) $(x-4)^2=x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2=x^2-8x+16$

β) $(2y-1)^2=(2y)^2-2(2y)\cdot 1+1^2=4y^2-4y+1$

γ) $(x-3y)^2=x^2-2\cdot x(3y)+(3y)^2=x^2-6xy+9y^2$

δ) $(2\alpha-3\beta)^2=(2\alpha)^2-2(2\alpha)(3\beta)+(3\beta)^2=4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2$

ε) $(x^2-3x)^2=(x^2)^2-2(x^2)(3x)+(3x)^2=x^4-6x^3+9x^2$

στ) $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x-2+\frac{1}{x}$

8.10 **Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις:**

α) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ β) $\left(-\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)^2$

γ) $\left(\sqrt{5}-3\right)^2$ δ) $\left(-2+\sqrt{2}\right)^2$

Λύση:

Έχουμε:

α) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$

β) $\left(-\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)^2=\left[-\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)\right]^2=\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^2$

$$=\left(\sqrt{8}\right)^2+2\sqrt{8}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$=8+2\sqrt{16}+2=10+8=18$$

<u>1^{η} Παρατήρηση:</u>

Ισχύει: $(-\alpha-\beta)^2=\left[-(\alpha+\beta)\right]^2=(\alpha+\beta)^2$

γ) $\left(\sqrt{5}-3\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot3+3^2=5-6\sqrt{5}+9=14-6\sqrt{5}$

δ) $\left(-2+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}-2\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot2+2^2=2-4\sqrt{2}+4$

$$=6-4\sqrt{2}$$

<u>2^{η} Παρατήρηση:</u>

Ισχύει: $(-\alpha+\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$

<u>8.11</u> Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\mathbf{x}+\mathbf{2})^3$ **β)** $(\mathbf{2y}-\mathbf{1})^3$ **γ)** $(\mathbf{2x}+\mathbf{3y})^3$

δ) $(\mathbf{y}^2-\mathbf{2})^3$ **ε)** $(\mathbf{x}^2+\mathbf{3x})^3$ **στ)** $(\mathbf{3x}-\mathbf{2y})^3$

<u>Λύση:</u>

Αν έχουμε τον κύβο αθροίσματος χρησιμοποιούμε το σχήμα:

$$(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}}+\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^3=(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^3+3(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^2(\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})+3(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})(\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^2+(\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^3$$

ενώ αν έχουμε τον κύβο της διαφοράς χρησιμοποιούμε το σχήμα:

$$(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}}-\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^3=(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^3-3(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^2(\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})+3(\underset{1^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})(\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^2-(\underset{2^o}{\underset{\uparrow}{\ldots}})^3$$

α) $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot2+3\cdot x\cdot2^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$

β) $(2y-1)^3=(2y)^3-3(2y)^2\cdot1+3(2y)\cdot1^2-1^3=8y^3-12y^2+6y-1$

γ) $(2x+3y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$

$$=8x^3+3\cdot 4x^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot 9y^2+27y^3$$

$$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$$

δ) $\left(y^2-2\right)^3=\left(y^2\right)^3-3\left(y^2\right)^2\cdot 2+3\left(y^2\right)\cdot 2^2-2^3=y^6-6y^4+12y^2-8$

ε) $\left(x^2+3x\right)^3=\left(x^2\right)^3+3\left(x^2\right)^2(3x)+3\left(x^2\right)(3x)^2+(3x)^3$

$$=x^6+3x^4\cdot 3x+3x^2\cdot 9x^2+27x^3$$

$$=x^6+9x^5+27x^4+27x^3$$

στ) $(3x-2y)^3=(3x)^3-3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2-(2y)^3$

$$=27x^3-3\cdot 9x^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot 4y^2-8y^3$$

$$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$$

8.12 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+2)(x-2)$ **β)** $(3-x)(3+x)$ **γ)** $(x+4)(4-x)$

δ) $(2x+3y)(2x-3y)$ **ε)** $(x-y)(-x-y)$ **στ)** $(-x+y)(-x-y)$

Λύση:

Με τη βοήθεια του σχήματος:

$$\underset{1^o}{(\ldots}+\underset{2^o}{\ldots)}\underset{1^o}{(\ldots}-\underset{2^o}{\ldots)}=\underset{1^o}{(\ldots)^2}-\underset{2^o}{(\ldots)^2}$$

έχουμε:

α) $(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$

β) $(3-x)(3+x)=3^2-x^2=9-x^2$

γ) $(x+4)(4-x)=4^2-x^2=16-x^2$

δ) $(2x+3y)(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$

1η Παρατήρηση: *Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η διαφορά τετραγώνων προκύπτει από τον παράγοντα της διαφοράς. Γενικά ισχύει: (α+β)(β−α)=β²−α² ή σχηματικά (Δ+Ο)(Δ−Ο)=Δ²−Ο².*

ε) $(x-y)(-x-y)=(x-y)[-(x+y)]=-(x-y)(x+y)$

$$=-(x^2-y^2)=-x^2+y^2$$

στ) $(-x+y)(-x-y)=(y-x)[-(x+y)]=-(y-x)(x+y)$

$$=-(y^2-x^2)=-y^2+x^2$$

2η Παρατήρηση: *Τα ερωτήματα ε) και στ) μπορούμε να τα υπολογίσουμε εκτελώντας κατευθείαν τις πράξεις πολυωνύμων και έτσι να αποφύγουμε την εφαρμογή της ταυτότητας.*

8.13 Να δείξετε ότι το πολυώνυμο:
$P(x)=(x-3)^2-(3x-1)^2+8(x-1)(x+1)$ είναι μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση:

Εφαρμόζουμε τις ταυτότητες τετράγωνο διαφοράς και διαφορά τετραγώνων:

$$P(x)=(x-3)^2-(3x-1)^2+8(x-1)(x+1)$$
$$=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-\left[(3x)^2-2(3x)\cdot 1+1^2\right]+8(x^2-1^2)$$
$$=x^2-6x+9-(9x^2-6x+1)+8x^2-8$$
$$=x^2-6x+9-9x^2+6x-1+8x^2-8=0 \text{ μηδενικό πολυώνυμο.}$$

Προσοχή! *Όταν αναπτύσσουμε μια ταυτότητα η οποία έχει μπροστά το μείον, να βάζουμε πάντα αγκύλη ή παρένθεση στο ανάπτυγμα.*

8.14 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-3)(x^2+3x+9)$ **β)** $(y+2)(y^2-2y+4)$

γ) $(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)$ **δ)** $(2\omega+1)(4\omega^2-2\omega+1)$

Λύση:

Με τη βοήθεια του σχήματος:

$$(\Delta-\bigcirc)(\Delta^2+\Delta\bigcirc+\bigcirc^2)=\Delta^3-\bigcirc^3$$
$$(\Delta+\bigcirc)(\Delta^2-\Delta\bigcirc+\bigcirc^2)=\Delta^3+\bigcirc^3$$

έχουμε:

α) $(x-3)(x^2+3x+9)=(x-3)(x^2+x\cdot 3+3^2)=x^3-3^3=x^3-27$

β) $(y+2)(y^2-2y+4)=(y+2)(y^2-y\cdot 2+2^2)=y^3+2^3=y^3+8$

γ) $(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)=(1-\alpha)(1^2+1\cdot\alpha+\alpha^2)=1^3-\alpha^3=1-\alpha^3$

δ) $(2\omega+1)(4\omega^2-2\omega+1)=(2\omega+1)((2\omega)^2-2\omega\cdot 1+1^2)=(2\omega)^3+1^3$

$$=8\omega^3+1.$$

8.15 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$$

β) Να βρείτε το ανάπτυγμα: $(2x+3y+1)^2$

Λύση:

α) Έχουμε: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\alpha+\beta^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\gamma\beta+\gamma^2$$
$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$$

β) Από την προηγούμενη ταυτότητα, το ανάπτυγμα του $(2x+3y+1)^2$ είναι:

$$(2x+3y+1)^2=(2x)^2+(3y)^2+1^2+2\cdot 2x\cdot 3y+2\cdot 3y\cdot 1+2\cdot 2x\cdot 1$$
$$=4x^2+9y^2+1+12xy+6y+4x.$$

8.16 α) Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$$

β) Αν $x+\frac{2}{x}=3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x^2+\frac{4}{x^2}$

γ) Αν $x-\frac{3}{x}=2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x^2+\frac{9}{x^2}$

Λύση:

α) Κάνουμε πράξεις στο $2^{\text{ο}}$ μέλος κάθε ταυτότητας και έχουμε:

- $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

β) Η παράσταση $x^2+\frac{4}{x^2}$ γράφεται $x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ έχουμε:

$$x^2+\frac{4}{x^2}=x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2=\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{2}{x}=3^2-4=9-4=5.$$

γ) Η παράσταση $x^2+\frac{9}{x^2}$ γράφεται $x^2+\left(\frac{3}{x}\right)^2$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$ έχουμε:

$$x^2+\frac{9}{x^2}=x^2+\left(\frac{3}{x}\right)^2=\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+2x\cdot\frac{3}{x}=2^2+6=4+6=10.$$

8.17 α) Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

$$\boldsymbol{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)}$$

β) Αν $x+\frac{2}{x}=3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x^3+\frac{8}{x^3}$

γ) Αν $x-\frac{3}{x}=2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x^3-\frac{27}{x^3}$

Λύση:

α) Κάνουμε πράξεις στο 2ο μέλος κάθε ταυτότητας και έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=\alpha^3-\beta^3$$

β) Η παράσταση $x^3+\frac{8}{x^3}$ γράφεται $x^3+\left(\frac{2}{x}\right)^3$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ έχουμε:

$$x^3+\frac{8}{x^3}=x^3+\left(\frac{2}{x}\right)^3=\left(x+\frac{2}{x}\right)^3-3x\frac{2}{x}\left(x+\frac{2}{x}\right)=3^3-6\cdot3=27-18=9$$

γ) Η παράσταση $x^3-\frac{27}{x^3}$ γράφεται $x^3-\left(\frac{3}{x}\right)^3$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$ έχουμε:

$$x^3-\frac{27}{x^3}=x^3-\left(\frac{3}{x}\right)^3=\left(x-\frac{3}{x}\right)^3+3x\frac{3}{x}\left(x-\frac{3}{x}\right)=2^3+9\cdot2=8+18=26$$

8.18 Να μετατρέψετε τα κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$ **β)** $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **γ)** $\frac{7}{3+\sqrt{2}}$ **δ)** $\frac{6}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

Λύση:

α) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{5}+1$ και εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{4\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{4\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\frac{4\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\sqrt{5}+1$$

β) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ και εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

γ) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $3-\sqrt{2}$ και εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

$$\frac{7}{3+\sqrt{2}}=\frac{7\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)}=\frac{7\left(3-\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{7\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-2}=3-\sqrt{2}$$

δ) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$ και εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

$$\frac{6}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{6\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}=\frac{6\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{6\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{12-6}=$$

$$=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$$

<u>Σχόλιο:</u>

Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με τη ***συζυγή*** *παράσταση του παρονομαστή. Δηλαδή, αν ο άρρητος παρονομαστής έχει τη μορφή:*

- $\alpha+\sqrt{\beta}$, *τότε η συζυγής παράσταση είναι η* $\alpha-\sqrt{\beta}$
- $\alpha-\sqrt{\beta}$, *τότε η συζυγής παράσταση είναι η* $\alpha+\sqrt{\beta}$
- $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, *τότε η συζυγής παράσταση είναι η* $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$
- $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, *τότε η συζυγής παράσταση είναι η* $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
- $\lambda\sqrt{\alpha}+\kappa\sqrt{\beta}$, *τότε η συζυγής παράσταση είναι η* $\lambda\sqrt{\alpha}-\kappa\sqrt{\beta}$

<u>8.19</u> α) Να αποδείξετε την ταυτότητα Lagrange:

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(\alpha x+\beta y\right)^2+\left(\alpha y-\beta x\right)^2$$

β) Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς ν, μ με $\nu\neq\mu$ έτσι ώστε:

$$\nu^2+\mu^2=125$$

<u>Λύση:</u>

Το 1^{o} μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2$$

Το 2^{o} μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$$\begin{aligned}(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2&=(\alpha x)^2+2(\alpha x)(\beta y)+(\beta y)^2+\\&\quad(\alpha y)^2-2(\alpha y)(\beta x)+(\beta x)^2\\&=\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2+\alpha^2y^2-2\alpha\beta xy+\beta^2x^2\\&=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2\end{aligned}$$

Άρα $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(\alpha x+\beta y\right)^2+\left(\alpha y-\beta x\right)^2$.

β) Είναι $125 = 5 \cdot 25 = \left(1^2 + 2^2\right)\left(3^2 + 4^2\right)$ και σύμφωνα με τη ταυτότητα Lagrange για α = 1, β = 2, x = 3 και y = 4 έχουμε:

$$125 = \left(1^2 + 2^2\right)\left(3^2 + 4^2\right) = \left(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4\right)^2 + \left(1 \cdot 4 - 2 \cdot 3\right)^2 = 11^2 + 2^2$$

Άρα έχουμε: ν = 11 και μ = 2 ή ν = 2 και μ = 11.

<u>Σχόλιο:</u>

*Για να **αποδείξουμε μια ταυτότητα Α=Β**, όπου Α, Β παραστάσεις με μία ή περισσότερες μεταβλητές, ακολουθούμε τις παρακάτω μεθόδους:*

- *Ξεκινάμε από το ένα μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε στο άλλο. Συνήθως ξεκινάμε από το μέλος με τις περισσότερες πράξεις. Αυτή τη μέθοδο ακολουθήσαμε στα παραδείγματα 8.16 α) και 8.17 α)*
- *Κάνουμε πράξεις στο 1^o μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε σε μία παράσταση Γ, δηλαδή Α=Γ. Στη συνέχεια κάνουμε πράξεις στο 2^o μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε στην ίδια παράσταση Γ, δηλαδή Β=Γ. Επειδή Α=Γ και Β=Γ από τη μεταβατική ιδιότητα παίρνουμε Α=Β. Αυτή τη μέθοδο ακολουθήσαμε στη ταυτότητα Lagrange.*

<u>8.20</u> α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta} = 4 \text{ όπου } \alpha,\beta \neq 0$$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό: $\dfrac{3842^2 - 200^2}{2021 \cdot 1821}$

<u>Λύση:</u>

α) Κάνουμε πράξεις στο 1^o μέλος της ταυτότητας και έχουμε:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\left(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\right)}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{4\alpha\beta}{\alpha\beta} = 4$$

β) Έχουμε: $\dfrac{3842^2 - 200^2}{2021 \cdot 1821} = \dfrac{(2021+1821)^2-(2021-1821)^2}{2021 \cdot 1821} = 4$

Σχόλιο:

Όταν μετά από μια ταυτότητα ακολουθεί μια αριθμητική παράσταση, τότε για να βρούμε το αποτέλεσμα, χωρίς να κάνουμε πράξεις, θα χρησιμοποιούμε το συμπέρασμα από την ταυτότητα. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα θέσαμε για α=2021 και β=1821και βρήκαμε χωρίς πράξεις αποτέλεσμα 4.

8.21 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\beta\gamma = \frac{\beta^2+\gamma^2-(\beta-\gamma)^2}{2}$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, που έχει υποτείνουσα 10 cm, και οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 2 cm.

Λύση:

α) Κάνουμε πράξεις στο 2$^{\text{ο}}$ μέλος της ταυτότητας και έχουμε:

$$\frac{\beta^2+\gamma^2-(\beta-\gamma)^2}{2} = \frac{\beta^2+\gamma^2-(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)}{2} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2}{2}$$

$$= \frac{2\beta\gamma}{2} = \beta\gamma$$

β) Αν β είναι η μεγαλύτερη κάθετη και γ η μικρότερη, τότε: $\beta-\gamma=2$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα, θα ισχύει $\beta^2+\gamma^2=10^2=100$. Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου είναι:

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2-(\beta-\gamma)^2}{2} = \frac{100-2^2}{4} = \frac{96}{4} = 24\ \text{cm}^2$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

8.22 Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω ισότητες:

α) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$	Σ ή Λ
β) $(-\alpha+\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$	Σ ή Λ
γ) $(-\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2$	Σ ή Λ
δ) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$	Σ ή Λ
ε) $(-\alpha-\beta)^3=(\alpha+\beta)^3$	Σ ή Λ
στ) $(\alpha+2\beta)(2\beta-\alpha)=2\beta^2-\alpha^2$	Σ ή Λ

8.23 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1) Το ανάπτυγμα του $(2x+3)^2$ είναι:

α) $2x^2+6x+9$ β) $2x^2+12x+9$ γ) $4x^2+12x+9$ δ) $4x^2+6x+9$

2) Το ανάπτυγμα του $(x-3y)^2$ είναι:

α) $x^2-6xy+3y^2$ β) $x^2-6xy+9y^2$ γ) $x^2-3xy+9y^2$ δ) x^2-9y^2

3) Το ανάπτυγμα του $(x+1)^3$ είναι:

α) x^3+3x^2+3x+1 β) x^3+1 γ) x^3+3x+1 δ) x^3+x^2+x+1

4) Το ανάπτυγμα του $(2x+3)(3-2x)$ είναι:

α) $9-4x^2$ β) $4x^2-9$ γ) $9-2x^2$ δ) $2x^2-9$

8.24 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το ανάπτυγμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α) $(\alpha+\beta)^2$	1) $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$
β) $(\alpha-\beta)^3$	2) $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
γ) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$	3) $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$
δ) $(\alpha-\beta)^2$	4) $\alpha^2-\beta^2$
ε) $(\alpha+\beta)^3$	5) $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

Ασκήσεις για λύση

8.25 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+4)^2$ β) $(2x+5)^2$ γ) $(x^2+1)^2$

δ) $(x-3)^2$ ε) $(x-2y)^2$ στ) $(x^2-2x)^2$

8.26 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(3x+2y)^2$ β) $(xy+2)^2$ γ) $(x-\sqrt{2})^2$

δ) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ ε) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ στ) $\left(x^2-\frac{3}{x^2}\right)^2$

8.27 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(-x-6y)^2$ β) $(-2x+y)^2$ γ) $(-\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

δ) $(2\sqrt{2}-3)^2$ ε) $\left(-x-\frac{1}{2x}\right)^2$ στ) $(-x^2+2x)^2$

8.28 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $A=(x+2)^2-(x-2)^2-8x$ β) $B=(3\alpha-1)^2-(3-\alpha)^2+8$

γ) $\Gamma=(\alpha+2\beta)^2+(2\alpha-\beta)^2$ δ) $\Delta=(2x+1)^2-x(x+2)^2+x^3$

8.29 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(x+2y)^2-(x-2y)^2=8xy$

β) $(\alpha^2+4)(\beta^2+1)-(\alpha+2\beta)^2=(\alpha\beta-2)^2$

8.30 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

α) $(2x-\ldots)^2=\ldots-\ldots+16$ β) $(\ldots+3y)^2=x^2+\ldots+\ldots$

γ) $(\ldots-\ldots)^2=9\alpha^2-12\alpha\beta+\ldots$ δ) $(x+\ldots)^2=\ldots+5x+\ldots$

8.31 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+1)^3$ β) $(x-2)^3$ γ) $(x^2+1)^3$

δ) $(2x-1)^3$ ε) $(x-2y)^3$ στ) $(x^2+2x)^3$

8.32 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(-x-1)^3$ β) $(-x+1)^3$ γ) $(-2x-3)^3$

8.33 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $A=(x+2)^3-x^2(x+6)$ β) $B=x(x^2+3)+(1-x)^3$

γ) $\Gamma=(x-1)^3+(2x+1)^2-7x$ δ) $\Delta=x(x^2+12)+(-x-2)^3$

8.34 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(x-1)^3+3(x-1)^2=x^3-3x+2$

β) $(\alpha-1)^3+(\alpha+1)^3-8\alpha^3=-6\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$

γ) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+x\left(x-\frac{1}{3}\right)=x^3-\frac{1}{27}$

8.35 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(2x+3)(2x-3)$ β) $(3\alpha+\beta)(3\alpha-\beta)$

γ) $(x^2-5)(x^2+5)$ δ) $(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$

ε) $(x-7)(-x-7)$ στ) $(-4x+5)(-4x-5)$

8.36 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές:

α) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ β) $\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ γ) $\frac{11}{4+\sqrt{5}}$ δ) $\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

8.37 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $A=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ β) $B=(2x+1)(2x-1)-(2x-3)^2$

γ) $\Gamma=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)$ δ) $\Delta=(x-2)^2(x+2)^2$

8.38 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta)+(\alpha-3\beta)^2+6\alpha\beta=2\alpha^2$

β) $(x+2y)(x-2y)+(2x+y)(2x-y)=5(x-y)(x+y)$

8.39 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+3)(x^2-3x+9)$ β) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

γ) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

8.40 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy$

β) $(1-2x)^2-(x-2)^2=3(x-1)(x+1)$

γ) $(x-3)^2+(2x-1)^2=5(x-1)^2+5$

δ) $(\alpha-3\beta)^2-(3\alpha-\beta)^2=8(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)$

ε) $(x+1)^3-3(x+1)^2+2=x(x^2-3)$

στ) $(x+y)^3-(x-y)^2(x+y)=4xy(x+y)$

8.41 Αν $x+y=5$ και $xy=3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x^2+y^2$$

8.42 Αν $x-y=1$ και $xy=4$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x^2+y^2$$

8.43 Αν $x+\frac{1}{x}=4$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $x^2+\frac{1}{x^2}$ β) $x^3+\frac{1}{x^3}$

8.44 Αν $x-\frac{1}{x}=2$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $x^2+\frac{1}{x^2}$ β) $x^3-\frac{1}{x^3}$

8.45 Αν $\alpha^2+\alpha\beta=10$ και $\beta^2+\alpha\beta=6$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\alpha+\beta$.

8.46 Αν $x=5+\sqrt{\alpha}$ και $y=5-\sqrt{\alpha}$, με $\alpha>0$ να δείξετε ότι ο αριθμός: x^2+y^2 διαιρείται με το 2.

8.47 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=4\beta$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό: $x=\left(1821+\frac{1}{607}\right)^2-\left(1821-\frac{1}{607}\right)^2$

8.48 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2$$

β) Αν $\alpha=\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}$, να υπολογίσετε τον αριθμό:

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+3$$

8.49 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{(\alpha+1)^2-(\alpha-2)^2}{\alpha^2-(\alpha-1)^2}=3$$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό:

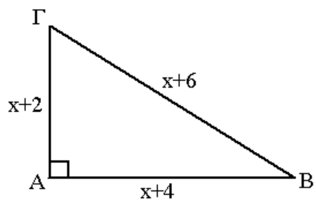
$$x=\frac{10001^2-9998^2}{10000^2-9999^2}$$

8.50 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

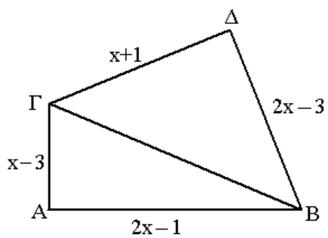
$$\frac{(\beta+\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2}{2}=\beta^2+\gamma^2$$

β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου που έχει κάθετες πλευρές που διαφέρουν κατά 7 cm και έχουν άθροισμα 17 cm.

8.51 Στο ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος, να βρείτε:
α) το x και τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ,
β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



8.52 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο να δείξετε ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Ισχύει το αντίστροφο;



8.53 Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β που ικανοποιούν τις παρακάτω ισότητες:

i) $\alpha^2+\beta^2-2\alpha-4\beta+5=0$ και ii) $2\alpha^2+\beta^2+6\alpha+2\alpha\beta+9=0$

(***Υπόδειξη:*** *Εμφανίζουμε τις ταυτότητες τετράγωνο διαφοράς στη σχέση i) και τετράγωνο αθροίσματος στη σχέση ii) και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: αν* $x^2+y^2=0$ *τότε* $x=y=0$)

8.54 Αν ισχύει: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

8.55 Αν ισχύει: $(\alpha+1)^2+(\beta+1)^2=\alpha^2+\beta^2+2$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι.

8.56 Αν ισχύει: $\alpha^2+\beta^2=4\alpha\beta$ με $\alpha>\beta>0$ να δείξετε ότι:

i) $(\alpha-\beta)^2=2\alpha\beta$

ii) $(\alpha+\beta)^2=6\alpha\beta$

iii) $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\sqrt{3}$

8.57 Αν ισχύει: $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ δείξετε ότι: $\alpha=\beta=0$.

(***Υπόδειξη:*** *Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση με το 2 και δημιουργούμε ταυτότητες στο 1^o μέλος. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: αν* $x^2+y^2+z^2=0$ *τότε* $x=y=z=0$)

8.58 Αν α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma=0$$

να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

8.59 Δίνεται η παράσταση:

$$K(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$

α) Να υπολογίσετε την παράσταση: $K(-x)\cdot K(x)$.

β) Να βρείτε τον αριθμό:

$$x=K(999)\cdot K(-1000)\cdot K(-999)\cdot K(1000)$$