Λέξεις και ιδέες

Όταν οι λέξεις επαναστάτησαν απέναντι στα γράμματα, γεννήθηκαν όντα φτερωτά που τα είπανε ιδέες. Άλλοτε ήταν τρομαχτικά και κάρφωναν τα νύχια τους στο μυαλό αυτουνού που τις σκεφτόταν. Άλλοτε πάλι ήταν λυτρωτικά ανοίγοντας δρόμους φανερούς ως το ποτάμι, που το νερό του το λέγανε σκοπό.

Προσπάθησα να συναρμολογηθώ μετά από πενήντα χρόνια, ράβοντας με γυάλινες κλωστές πάνω σ' ένα τσουβάλι όλες μου τις ιδέες. Η πρώτη σκέψη που έκανα μου 'δωσε μια ιδέα. Δυστυχώς όμως ξεχνούσα.

Για καλή μου τύχη ανακάλυψα το παρακάτω σχήμα της ραφής. Οι ιδέες που ξεχνούσα κάθε φορά που έκανα μια σκέψη, μαζί μ' αυτές που ξέχασα πως είχα ξεχάσει την προηγούμενη φορά, βγαίνανε πάντα ίδιες με τις σκέψεις που ήδη έχω κάνει. Φανταστείτε ότι εκατό εκατομμύρια σκέψεις έχω κάνει προσπαθώντας να φτιάξω το γαζί. Δεν ξέρω όμως πόσες ιδέες ξέχασα. Μήπως μπορείτε να το βρείτε εσείς για εμένα; Γιατί φοβάμαι μην ξεμείνω από ύφασμα, πριν προλάβω να ντυθώ...

Λύση

- **Η μορφή της μαθηματικής επαγωγής που χρησιμοποιείται εδώ είναι:** Δείχνουμε ότι η πρότασή μας ισχύει για $\nu=1$. Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu=2,\nu=3,\ldots,\nu=\kappa$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύει για $\nu=\kappa+1$.

- **Υπακολουθία** μιας δοσμένης ακολουθίας α_ν είναι μια καινούργια ακολουθία που προκύπτει από επιλογή των όρων της α_ν. Ακριβέστερα : Αν κ_ν γνήσια αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων τότε η α_{κ_ν} ονομάζεται υπακολουθία της α_ν.

- **Αποδεικνύεται ότι μια φραγμένη ακολουθία περιέχει πάντοτε μια μονότονη υπακολουθία.** Άρα μια συγκλίνουσα προς πραγματικό αριθμό υπακολουθία, αφού είναι γνωστό ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει προς πραγματικό αριθμό.

- **Αν μια ακολουθία δεν συγκλίνει προς πραγματικό αριθμό, αλλά είναι φραγμένη, θα περιέχει δυο τουλάχιστον υπακολουθίες που θα συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.**

- **Ακέραιο μέρος του x** ονομάζουμε τον μικρότερο ή ίσο πλησιέστερο ακέραιο προς τον αριθμό x. Τον συμβολίζουμε με $[x]$. Έτσι για παράδειγμα έχουμε : $[2.3]=2$, $[5.9]=5$, $[8]=8$ και $[-5]=-5$, $[-3.2]=-4$, $[-6.8]=-7$. Το ακέραιο μέρος του x είναι μια ασυνεχής συνάρτηση στο R και γενικά ισχύει $x-1<[x]\le x$, $\forall x\in \mathbb{R}$

- Ονομάζω n τον αριθμό της σκέψης που ήδη έχω κάνει $n \in N^*$. Θέτω επίσης $f(n)$ τον αριθμό των ιδεών που ξεχνώ στην νιοστή σκέψη. Τότε $f(f(n-1))$, $n \geq 2$ είναι οι ιδέες που ξέχασα πως είχα ξεχάσει την προηγούμενη φορά! Από την εκφώνηση προκύπτει $\boldsymbol{f(0)=0}$ γιατί ιδέα δεν κατεβαίνει αν δεν σκεφτώ .

Συμπεραίνουμε ακόμη, από την εκφώνηση, ότι ισχύει ο αναδρομικός τύπος $\boldsymbol{f(n)=n-f(f(n-1))}$ και θα προσπαθήσουμε να βρούμε τον νιοστό όρο σαν συνάρτηση του n, ώστε τελικά να υπολογίσουμε τον αριθμό $f(100.000.000)$

- Έστω $f(n)=n-f(f(n-1))$, $f(0)=0$

  Θα δείξουμε ότι: $f(n+1)-f(n) \in \{0,1\}$ επαγωγικά

- Για $n=0$ είναι: $f(1)=1-f(f(0))=1-f(0)=1-0=1$

  $f(0)=0$

  $f(1)-f(0)=1$ (1)

Για $n=1$ είναι: $f(2)=2-f(f(1))=2-f(1)=2-1=1$

$f(1)=1$

$f(2)-f(1)=0$ (2)

Για $n=2$ είναι: $f(3)=3-f(f(2))=3-f(1)=3-1=2$

$f(2)=1$

$f(3)-f(2)=1$ (3)

Για $n=3$ ομοίως

. . . . . .

Για $n-1$ $f(n)-f(n-1) \in \{0,1\}$ (n)

a) Αν $f(n)-f(n-1)=0$ τότε $f(n)=f(n-1)$ άρα $f(f(n))=f(f(n-1))$ δηλαδή $n-f(f(n))=n-f(f(n-1))$ οπότε $n-f(f(n))=1+n-1-f(f(n-1))$ που σημαίνει ότι $f(n+1)=1+f(n)$ ή $f(n+1)-f(n)=1$