Ισχύουν όμως και οι ακόλουθες ιδιότητες, από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας:

Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε

Ιδιότητα	**Παράδειγμα**
1) $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{64} = 4$
2) $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}, \mu\varepsilon\ \beta \neq 0$	$\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{81} = 3$
3) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$	$\sqrt[5]{\sqrt[2]{23}} = \sqrt[10]{23}$
4) $\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$	$\sqrt[20]{16^5} = \sqrt[4]{16} = 2$

Απόδειξη

1) Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}^{\nu} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}^{\nu} = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta, \text{που ισχύει}$$

2) Έχουμε:

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}^{\nu}}{\sqrt[\nu]{\beta}^{\nu}} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{που ισχύει}$$

3) Έχουμε:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu \cdot \nu} = \left(\sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}\right)^{\mu \cdot \nu} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \alpha, \pi o \upsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$$

Σχόλιο: Η ιδιότητα 1. ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa}$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\kappa = \alpha > 0$, ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha}^{\kappa}$$

οπότε, λόγω της ιδιότητας 1, για α , β ≥ 0 έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$

Άσκηση 12

Να γίνουν οι πράξεις :

$$\alpha)\quad \sqrt{6}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}} \qquad\qquad \beta)\quad \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$$

Λύση

$$\alpha)\ \sqrt{6}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}=$$
$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{9-3}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{6}^2=6$$

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$$

$$\beta)\ \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}$$
$$=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4-2}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$$

Εφαρμογή 12

Να γίνουν οι πράξεις :

$$\alpha)\quad \sqrt{7}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{2}} \qquad\qquad \beta)\quad \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{4+\sqrt{7}}$$

Άσκηση 13 (Σχολικό βιβλίο σελίδα74 , Α' ομάδα)

Να αποδείξετε ότι

$$\alpha)\ \sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2} \qquad \beta)\ \sqrt[5]{2\cdot\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$$

Λύση

$$\alpha)\ \sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}}}=\sqrt{\sqrt{2^{1+\frac{1}{3}}}}=\sqrt{\sqrt{2^{\frac{4}{3}}}}=\sqrt{\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\sqrt{2^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}}=\sqrt{2^{\frac{4}{6}}}=\left(2^{\frac{4}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}=2^{\frac{4}{12}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$$

$Αν\ \alpha\geq 0\ \ και$
$\kappa,\lambda,\nu,\mu\in N^*\ \ τότε:$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως επιλύεται η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

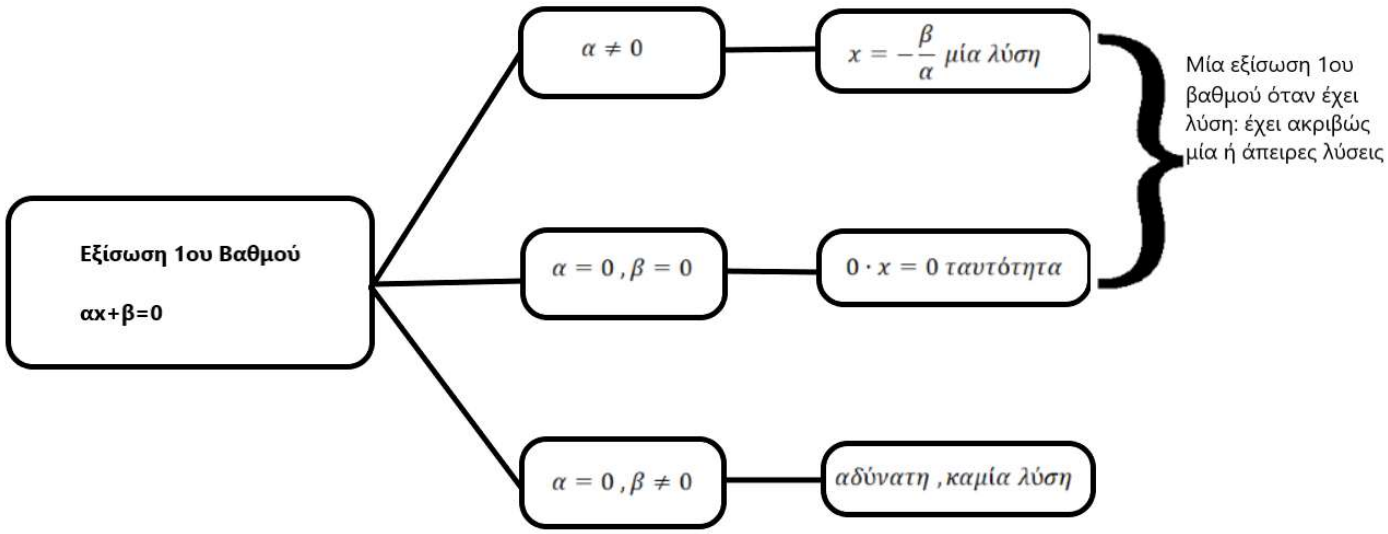
Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Εάν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι πρώτου βαθμού και έχει **ακριβώς μία λύση** (μοναδική λύση) την
$$x = -\frac{\beta}{\alpha}$$
- Εάν $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γράφεται $0x = -\beta$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις
  - Εάν $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση είναι **αδύνατη**
  - αν είναι β = 0 έχει τη μορφή 0x = 0 και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι **ταυτότητα**

Ορισμός

Η λύση της εξίσωσης αx + β = 0 και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και ρίζα αυτής.

Συνοψίζοντας, ισχύει:



3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού

Η εξίσωσης της μορφής: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ λέγεται **εξίσωση δευτέρου βαθμού** και για την επίλυση της χρησιμοποιούμε την παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ που λέγεται **διακρίνουσα**.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις ,

- Εάν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις , τις
$$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$
- Εάν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$
- Εάν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη

Έχουμε

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \overset{\alpha \neq 0}{\Longleftrightarrow} x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow\Leftrightarrow x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \Leftrightarrow$$

Δηλαδή , εφαρμόζω τη μέθοδο συμπλήρωση τετραγώνου

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν Δ > 0, τότε έχουμε:
$$x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή ,

$$x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$ και η ισοδύναμη της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$ έχει δύο άνισες λύσεις τις ,

$$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

5.2 Αριθμητική Πρόοδος

Ορισμός

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε ω και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.

Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω. αν και μόνο αν ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \text{ ή } \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$$

Αν σε μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της.

Ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\text{ν ισότητες} \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \omega \\ \alpha_3 = \alpha_2 + \omega \\ \alpha_4 = \alpha_3 + \omega \\ \dots \\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής βρίσκουμε:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 + \omega + \alpha_2 + \omega + \alpha_3 + \omega + \ldots + \alpha_{\nu-1} + \omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + \left(\underbrace{\omega + \omega + \omega + \ldots + \omega + \omega}_{(\nu-1)\ \text{προσθετέοι}} \right) = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega$$

Άσκηση 7 (Τράπεζα Θεμάτων 4545)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού *Α* της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-2$

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$

Λύση

α) πρέπει $|x|-3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$. Άρα το πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\{-3,+3\}$

$\boldsymbol{\beta}$) $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}=\dfrac{|x|^2-5|x|+6}{|x|-3}$

Για να παραγοντοποιήσω την παράσταση $|x|^2-5|x|+6$ θέτω $|x|=\omega \geq 0$ τότε προκύπτει το τριώνυμο $\omega^2-5\omega+6$ με $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1$ και ρίζες $\omega=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}=3$ ή 2

$\text{Άρα } \omega^2-5\omega+6=(\omega-3)(\omega-2) \overset{|x|=\omega}{\Leftrightarrow} (|x|-3)(|x|-2).$

$\text{Τότε}, f(x)=\dfrac{(|x|-3)(|x|-2)}{|x|-3}=|x|-2 \text{ με } x \neq \pm 3$

γ) Η εξίσωση $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$, $\mu\varepsilon\ x \neq \pm 3$ από το ερώτημα β) αντικαθιστώ όπου $f(x)=|x|-2$ και γράφεται $(|x|-2+2)^2-4(|x|-2)-5=0 \Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3=0$

Αν θέσουμε $|x|=\omega \geq 0$ τότε προκύπτει η εξίσωση $\omega^2-4\omega+3=0$

με $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=4$ και ρίζες $\omega=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2}{2}=3$ ή 1. Επομένως $|x|=3$ που απορρίπτεται λόγω του πεδίου ορισμού της f ή $|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ που είναι δεκτές.

Εφαρμογή 7

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2-7|x|+6}{|x|-1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού *Α* της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-6$

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+5)^2-f(x)-7|x|+14=0$

Ερωτήσεις Σωστό-Λάθος

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω προτάσεις:

1. Για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει ότι: $(-a-\beta)^2 = (\beta-\alpha)^2$ $(0.E.\Phi.E)$
2. Είναι $a^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
3. $xy = x^2 \Leftrightarrow x = y$, για κάθε $x, y \in R$ $(0.E.\Phi.E)$
4. Ισχύει : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ $(0.E.\Phi.E)$
5. Αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι, τότε $\alpha \cdot \beta < 0$. $(0.E.\Phi.E)$
6. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ $(0.E.\Phi.E)$
7. Αν $\gamma \neq 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow \beta \cdot \gamma$ $(0.E.\Phi.E)$
8. Αν $\alpha > \beta$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma > \delta$ τότε ισχύει $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$. $(0.E.\Phi.E)$
9. Ισχύει $|\alpha| = -\alpha$ για $\alpha < 0$
10. Αν $\alpha, \beta \in R$ τότε ισχύει: $|a-\beta| = |\beta-\alpha|$ $(0.E.\Phi.E)$
11. Ισχύει $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$
12. Ισχύει $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$
13. Ισχύει $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$, $\delta\pi o\upsilon\ \theta > 0$
14. Αν $\alpha^2 + |\beta| = 0$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta = 0$
15. Η απόσταση των αριθμών α, β είναι ίση με $|a-\beta|$ $(0.E.\Phi.E)$
16. Ισχύει $d(a,\beta) = |\beta - a|$
17. Αν $\theta > 0$ τότε : $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
18. Ισχύει $\sqrt{x^2} = x$ για κάθε $x \in R$
19. Αν $x > 0$, τότε $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$ $(0.E.\Phi.E)$
20. Αν $\beta < \alpha$ τότε $\sqrt{(\beta-\alpha)^2} = \alpha - \beta$. $(0.E.\Phi.E)$
21. Ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$
22. Αν $\alpha \cdot \beta > 0$ τότε πάντοτε ισχύει $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ $(0.E.\Phi.E)$
23. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$
24. Αν η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αόριστη τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.