Θέμα 5

Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $f, g : R \to R$ για τις οποίες ισχύουν

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = -\frac{1}{2} \text{ και } \lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{x-2} = -1 \text{ και } f(0)=1 \text{ και } g(x) = f(x) - x + \frac{3}{2},\ x \in R.$$

.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1.$

Β. Βρείτε το $\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|^3 - 1 + (f(x)-1)^2}{\sqrt{f(x)} - 1}$.

Γ. Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται στο $[2, +\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη.

Δ. Δύο μικροί μαθητές Α και Β κάνουν βόλτα με τα ποδήλατα τους στον ίδιο ευθύ δρόμο (θεωρήστε ως δρόμο τον πραγματικό άξονα $x'x$).

Οι θέσεις τους πάνω στον πραγματικό άξονα κάθε στιγμή t δίνονται αντίστοιχα από τις συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$, $t \in [0,5]$, t σε min.

i) Αποδείξτε ότι υπάρχει χρονική στιγμή –την οποία και να βρείτε– κατά την οποία οι μαθητές θα βρεθούν δίπλα – δίπλα με κίνδυνο να συγκρουστούν αν δεν προσέξουν.

ii) Να βρείτε τη μέγιστη μεταξύ τους απόσταση κατά τη διάρκεια της προηγούμενης διαδρομής.

Επίλυση

Α. Αν $f(x)$ πολυώνυμο ν βαθμού με $\nu \geq 3$ θα ήταν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = \pm\infty$ (άτοπο).

Αν $f(x)$ πολυώνυμο 1ου βαθμού ή $f(x)$ σταθερό πολυώνυμο, τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 0 \text{ (άτοπο).}$$

Άρα $f(x)$ πολυώνυμο 2ου βαθμού δηλαδή

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ με $f'(x) = 2\alpha x + \beta.$

Σκέψεις – Ιδιότητες

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu + \ldots + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \ldots + \beta_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{αν } \nu > \kappa \\ \frac{\alpha_\nu}{\beta_\kappa}, & \text{αν } \nu = \kappa \\ 0, & \text{αν } \nu < \kappa \end{cases}$

  $(\nu, \kappa \in N, \alpha_\nu \neq 0$ $\beta_\mu \neq 0).$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2}{x^2}=\alpha$, άρα $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

Α΄ τρόπος:

$$\lim_{x\to 2} f'(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{f'(x)}{x-2}\cdot(x-2)\right)=-1\cdot 0=0$$

αφού: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{x-2}=-1$ και $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$.

Όμως η f' είναι συνεχής στο $x_0=2$ ως πολυωνυμική, οπότε $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}f'(x)=0$.

Έτσι $f'(2)=0\Leftrightarrow 2\cdot\alpha\cdot 2+\beta=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\beta=0\Leftrightarrow\beta=2.$$

Β΄ τρόπος:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2\alpha x+\beta}{x-2}\overset{\left(\alpha=-\frac{1}{2}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-x+\beta}{x-2}\left(\frac{-2+\beta}{0}\right).$$

Πρέπει $-2+\beta=0\Leftrightarrow\beta=2$ γιατί διαφορετικά το παραπάνω όριο θα ήταν $\pm\infty$ (άτοπο).

Τότε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x+2}{x-2}=-1$.

- Δίνεται $f(0)=1\Leftrightarrow\gamma=1$.

  Επομένως $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$.

- Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι της μορφής $\dfrac{\alpha}{0}$, τότε:

  * Αν $\alpha\neq 0$ έχουμε

  $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$

  $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{g(x)}f(x)\right]=$

  $(\pm\infty)\cdot\alpha\overset{(\alpha\neq 0)}{=}\pm\infty$.

  * Αν $\alpha=0$ θα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ και με την κατάλληλη μεθοδολογία θα βρούμε (αν υπάρχει) το όριο.

Β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1>0$, οπότε $f(x)>0$ για κά-θε x κοντά στο $x_0=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|^3-1+(f(x)-1)^2}{\sqrt{f(x)}-1}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(f(x))^3-1+(f(x)-1)^2}{\sqrt{f(x)}-1}=$ | Θέτουμε $f(x)=y$. Αν $x\to 0$, τότε $y\to 1$

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lambda>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0, δηλαδή η συνάρτηση (παίρνει) έχει τιμές ομόσημες του ορίου της σε (κάποια) περιοχή του x_0.

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1+(y-1)^2}{\sqrt{y}-1}=$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)\left(y^2+y+1+y-1\right)}{\sqrt{y}-1}=$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)\left(y^2+2y\right)\cdot\left(\sqrt{y}+1\right)}{\left(\sqrt{y}-1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)}=$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)\left(y^2+2y\right)\left(\sqrt{y}+1\right)}{y-1}=$$

$$\lim_{y\to 1}\left[\left(y^2+2y\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\right]=(1+2)(1+1)=6.$$

Γ. Έχουμε $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1,\ x\in[2,+\infty)$ με

$f'(x)=-x+2<0$ για κάθε $x>2$.

Άρα $f\searrow$ στο $[2,+\infty)$.

Επομένως η f είναι "$1-1$", οπότε η f αντιστρέφεται στο $A=[2,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(2)\right]=(-\infty,3].$$

Αν y κάθε τιμή της συνάρτησης f για την οποία υπάρχει $x\in[2,+\infty)$ με $y=f(x)$, τότε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1\Leftrightarrow$$

$$2y=-x^2+4x+2\Leftrightarrow x^2-4x+4=6-2y\Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2=6-2y\Leftrightarrow|x-2|^2=6-2y\overset{(y\le 3)}{\Leftrightarrow}$$

$$|x-2|=\sqrt{6-2y}\overset{(x\ge 2)}{\Leftrightarrow}x-2=\sqrt{6-2y}\Leftrightarrow$$

$$x=2+\sqrt{6-2y}.$$

- Κάθε γνήσια μονότονη συνάρτηση είναι "$1-1$" (στο πεδίο ορισμού της μονοτονίας).
- Αν η f αντιστρέφεται, για να βρούμε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της αντίστροφης:

  * Θέτουμε

    $y=f(x)$

    και λύνουμε ως προς x.

    Στην πορεία αυτή σημειώνουμε τους περιορισμούς που προκύπτουν για να καταλήξουμε

Άρα:

$f^{-1}:(-\infty,3]\to[2,+\infty)$ με $f^{-1}(x)=2+\sqrt{6-2x}$.

Β΄ τρόπος:

Θέτουμε $y=f(x)\Leftrightarrow 2y=-x^2+4x+2\Leftrightarrow$

$$x^2-4x-2+2y=0,\ x\geq 2\quad (\varepsilon).$$

Βρίσκουμε $\Delta=8(3-y)$.

Πρέπει $\Delta\geq 0\Leftrightarrow y\leq 3$.

Τότε $x=\dfrac{4\pm\sqrt{8(3-y)}}{2}=2\pm\sqrt{2(3-y)}$ και

επειδή έχουμε $x\geq 2$ καταλήγουμε:

$$x=2+\sqrt{6-2y}.$$

Άρα: $f^{-1}:(-\infty,3]\to[2,+\infty)$ με

$$f^{-1}(x)=2+\sqrt{6-2x}.$$

έτσι στο σύνολο τιμών.

* Με αλλαγή της θέσης των μεταβλητών προκύπτει ο τύπος της αντίστροφης.
* Αρκετά συχνά βρίσκουμε το σύνολο τιμών με τη βοήθεια των παραγώγων (μονοτονία) και έτσι λύνοντας ως προς x δεν δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στους περιορισμούς.

Δ. **i)** Έχουμε $f(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+2t+1$ και

$$g(t)=f(t)-t+\frac{3}{2},\ t\in[0,5]$$

οι συναρτήσεις θέσης των ποδηλάτων A και B αντίστοιχα.

Τα ποδήλατα θα συναντηθούν τη στιγμή t_0 για την οποία $f(t_0)=g(t_0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(t_0)=f(t_0)-t_0+\frac{3}{2}\Leftrightarrow t_0=\frac{3}{2}\min.$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t_0=\dfrac{3}{2}$ τα ποδήλατα θα συναντηθούν.

Οι ταχύτητες με τις οποίες κινούνται τα ποδήλατα A και B είναι:

$\upsilon_A(t)=f'(t)=-t+2$ και

$\upsilon_B(t)=g'(t)=f'(t)-1=-t+1$.

- Αν $S(t)$ η συνάρτηση θέσης ενός σώματος που κινείται κατά μήκος ενός άξονα, τότε:
  * $\upsilon(t)=S'(t)$.
  * $\upsilon(t)>0$ τότε κίνηση δεξιά.
  * $\upsilon(t)<0$ τότε κίνηση αριστερά.
  * $\upsilon(t_0)=0$ τότε έχουμε αλλαγή κατεύθυνσης ή μεταβολή επιτάχυνσης.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = \frac{3}{2}$ έχουμε:

$$\upsilon_A\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} > 0,$$

άρα το ποδήλατο Α κινείται προς τα δεξιά και

$$\upsilon_B\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} < 0,$$

άρα το ποδήλατο Β κινείται προς τα αριστερά.

Επομένως τα ποδήλατα θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t_0 = \frac{3}{2}$ με κίνδυνο να συγκρουστούν επειδή κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση.

ii) Η μεταξύ τους απόσταση $h(t)$ κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = |f(t) - g(t)|,\ t \in [0, 5].$$

Τότε $h(t) = \left|t - \frac{3}{2}\right| = \begin{cases} -t + \frac{3}{2}, & 0 \le t < \frac{3}{2} \\ t - \frac{3}{2}, & \frac{3}{2} \le t \le 5 \end{cases}.$

- $\lim\limits_{t \to \frac{3}{2}^-} h(t) = 0 = \lim\limits_{t \to \frac{3}{2}^+} h(t) = h\left(\frac{3}{2}\right)$.

  Άρα η h συνεχής στο $t_0 = \frac{3}{2}$.

- Για $t \in \left[0, \frac{3}{2}\right)$ έχουμε $h'(t) = -1 < 0 \Rightarrow$

  $h \searrow$ στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

- Για $t \in \left(\frac{3}{2}, 5\right]$ έχουμε $h'(t) = 1 > 0 \Rightarrow$

  $h \nearrow$ στο $\left[\frac{3}{2}, 5\right]$.

- Για τη μονοτονία και τα ακρότατα στα σημεία αλλαγής του τύπου, εξετάζουμε μόνο τη συνέχεια (όχι την παράγωγο).

t	0		$3/2$		5
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$		$\nearrow$	
	Τ.Μ.		Ε		Τ.Μ.

Έτσι η συνάρτηση h παρουσιάζει:

- Τ.Μ. $= h(0) = \dfrac{3}{2}$.
- Τ.Μ. $= h(5) = \dfrac{7}{2}$.
- Ε. $= h\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

και από τον πίνακα μονοτονίας προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της h είναι το

$$h(5) = \frac{7}{2} \text{ μέτρα.}$$

- Τα άκρα κλειστού πεδίου ορισμού είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων που μπορεί να γίνουν και ολικά ακρότατα.

Θέμα 6

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:

$$συν\left(f\left(x\right)\right)+2f\left(x\right)-1=x\,,\,x\in R\,.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το R.

Β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

Γ. Για τη συνάρτηση $g: R \to R$ με $g\left(x\right)=\dfrac{\pi}{2}-x$:

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=f^{-1}\circ g$.

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+h\left(2022^{2023}\right)x^5}{\left(f\left(2\right)-f\left(1\right)\right)x+1}$.

Δ. Δείξτε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $\xi\in\left(0,4\pi\right)$ τέτοιος ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M\left(\xi,f\left(\xi\right)\right)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=\dfrac{1}{2}x+2022$.

Επίλυση

Α. Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$$\left(συν\left(f\left(x\right)\right)\right)'+\left(2f\left(x\right)\right)'-1'=x'\Leftrightarrow$$

$$-ημ\left(f\left(x\right)\right)\cdot f'\left(x\right)+2f'\left(x\right)=1\Leftrightarrow$$

$$f'\left(x\right)\left(-ημ\left(f\left(x\right)\right)+2\right)=1\Leftrightarrow$$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2-ημ\left(f\left(x\right)\right)}>0,\ \text{αφού}$$

$ημx\le 1<2,\ x\in R.$

Έτσι $f \nearrow$ στο R.

Για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$-1\le συνf\left(x\right)\le 1\Leftrightarrow -1\le x+1-2\left(f\left(x\right)\right)\le 1\Leftrightarrow$$

$$-2-x\le -2f\left(x\right)\le -x\Leftrightarrow$$

$$2+x\ge 2f\left(x\right)\ge x\Leftrightarrow\frac{x}{2}\le f\left(x\right)\le 1+\frac{x}{2}.$$

Σκέψεις – Ιδιότητες

- $-1\le ημx\le 1\Leftrightarrow$ $\left|ημx\right|\le 1.$
- $-1\le συνx\le 1\Leftrightarrow$ $\left|συνx\right|\le 1.$
- $f'\left(x\right)>0,$ $x\in\left(\alpha,\beta\right)\Rightarrow$ $f\left(x\right)\nearrow$ στο $\left[\alpha,\beta\right]$.
- Για το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης $f: A\to R$ απαιτείται να γνωρίζουμε

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{2}\right) = +\infty,$ οπότε από κριτήριο

παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$

Επειδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $A=(-\infty,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι το

$$f(A)=(-\infty,+\infty).$$

Β. Επειδή f γνησίως μονότονη συμπεραίνουμε ότι η f αντιστρέφεται με

$$f^{-1}:(-\infty,+\infty)\to(-\infty,+\infty).$$

Επειδή η αρχική σχέση (1) ισχύει για κάθε $x\in R$ και το σύνολο τιμών $f(A)$ της f είναι το R, μπορούμε να θέσουμε στην αρχική σχέση (1) όπου x το $f^{-1}(x)$ και να έχουμε

$$\text{συν}f\left(f^{-1}(x)\right)+2f\left(f^{-1}(x)\right)-1=f^{-1}(x)\Leftrightarrow$$

$$\text{συν}x+2x-1=f^{-1}(x), \text{ για κάθε } x\in f(R)=R$$

άρα $f^{-1}(x)=\text{συν}x+2x-1,$ για κάθε $x\in R.$

Γ. **i)** Πεδίο ορισμού της g το $D_g=R.$

Πεδίο ορισμού της $f^{-1}\circ g$ το $D\left(f^{-1}\circ g\right)=$

$$D\left(f^{-1}\circ g\right)=\left\{x\in R \mid x\in D_g \text{ και } g(x)\in D_{f^{-1}}\right\}$$

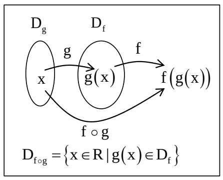
$$=\left\{x\in R \mid x\in R \text{ και } \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in R\right\}=R.$$

τις τιμές ή τις οριακές τιμές της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Τις περισσότερες φορές χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε και τη μονοτονία της συνάρτησης για να καταλήξουμε στο σύνολο τιμών $f(A)$.

- $f:A\to f(A)$

  * $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $\mathbf{x\in f(A)}$**.**

  * $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ για κάθε $\mathbf{x\in A}$**.**

- 

Ορίζεται η $f^{-1} \circ g$ με πεδίο ορισμού το R και τύπο:

$$\left(f^{-1} \circ g\right)(x) = f^{-1}\left(g(x)\right) =$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(g(x)\right) + 2g(x) - 1 =$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 =$$

$$\eta\mu x - 2x + \pi - 1.$$

Επομένως $h(x) = \eta\mu x - 2x + \pi - 1$ με πεδίο ορισμού $D_h = R$.

ii) Η συνάρτηση $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$h'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2 < 0 \Rightarrow h \searrow$ στο R

$\left(\sigma\upsilon\nu x \le 1 < 2\right)$.

Για $x = \dfrac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{2} + \pi - 1 = 1 - \pi + \pi - 1 = 0$$

και επειδή η $h(x)$ είναι γνησίως μονότονη συμπεραίνουμε ότι η $x = \dfrac{\pi}{2}$ μοναδική ρίζα της $h(x) = 0$.

Τότε:

$$\frac{\pi}{2} < 2022^{2023} \overset{(h \searrow R)}{\Leftrightarrow} h\left(\frac{\pi}{2}\right) > h\left(2022^{2023}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 > h\left(2022^{2023}\right).$$

Ακόμη

$$1 < 2 \overset{(f \nearrow)}{\Leftrightarrow} f(1) < f(2) \Leftrightarrow$$

$$f(2) - f(1) > 0.$$

- ΟΡΙΟ ΡΗΤΗΣ

Αν:

$$f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \ldots + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \ldots + \beta_0}$$

$\alpha_\nu \neq 0,\ \beta_\mu \neq 0$

τότε έχουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}.$$

*Προσοχή στο πρόσημο των συντελεστών.

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+h\left(2022^{2023}\right)x^5}{\left(f(2)-f(1)\right)x+1}=$$

$$\frac{h\left(2022^{2023}\right)}{\left(f(2)-f(1)\right)}\lim_{x\to+\infty}x^4=$$

$$\frac{h\left(2022^{2023}\right)}{f(2)-f(1)}(+\infty)=-\infty.$$

Δ. $f^{-1}(2\pi)=\text{συν}2\pi+2\cdot 2\pi-1=1+4\pi-1=4\pi.$

$f^{-1}(0)=\text{συν}0+2\cdot 0-1=1+0-1=0.$

$f^{-1}(2\pi)=4\pi \Leftrightarrow 2\pi=f(4\pi).$

$f^{-1}(0)=0 \Leftrightarrow 0=f(0).$

Η συνάρτηση είναι:

- συνεχής στο $[0,4\pi]$
- παραγωγίσιμη στο $(0,4\pi)$,

οπότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(0,4\pi)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(4\pi)-f(0)}{4\pi-0}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{2\pi}{4\pi}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)=\frac{1}{2}.$$

Τότε η εφαπτομένη στο $M\left(\xi,f(\xi)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=\frac{1}{2}x+2022.$

- Έχουμε: $f^{-1}(x)=\text{συν}x+2x-1.$
- Θυμηθείτε τη γεωμετρική ερμηνεία των θεωρημάτων ROLLE και Μέσης Τιμής.
- Όταν δεν μπορούμε να βρούμε τιμές της f, κοιτάμε αν μπορούμε να βρούμε τιμές της f^{-1}.