

6ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΕΣΤ

Ενότητα: Αμείωτες Ταλαντώσεις (ειδικές περιπτώσεις)
Χρόνος εξέτασης: 60 λεπτά

ΘΕΜΑ Α

I. Σημειώστε τη σωστή απάντηση.

1. Δύο σώματα βρίσκονται ακουμπισμένα το ένα πάνω στο άλλο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατήριου σταθεράς k . Το σύστημα πραγματοποιεί AAT. Η σταθερά επαναφοράς του κάθε σώματος
- Είναι ίση με k .
 - Είναι μικρότερη του k .
 - Είναι μεγαλύτερη του k .

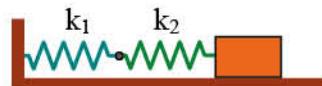
Μονάδες 5

2. Ένα σώμα μάζας m είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατήριου σταθεράς k και εκτελεί AAT υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F .
- Η θέση ισορροπίας του σώματος είναι στο φυσικό μήκος του ελατήριου.
 - Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος είναι συνάρτηση της τιμής της F .
 - Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης εξαρτάται από την κατεύθυνση και το μέτρο της F .

Μονάδες 5

3. Ένα σώμα εκτελεί AAT με τη βοήθεια δύο διαδοχικών ελατήριων με σταθερές k_1 και k_2 . Η σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης είναι:

$$3.1. D=k_1+k_2 \quad 3.2. 1/D=1/k_1+1/k_2 \quad 3.3. D=(k_1+k_2)/(k_1 \cdot k_2)$$



Μονάδες 5

4. Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με βάρη W_1 και W_2 αντίστοιχα, εκτελούν AAT πλάτους A με τη βοήθεια ενός οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχει τριβή με συντελεστή οριακής τριβής μ_s , τότε η συνθήκη προκειμένου το σύστημα να πραγματοποιεί AAT χωρίς να παρατηρηθεί ολίσθηση του σώματος Σ_1 είναι:

$$4.1. F_{el} \leq \mu_s \cdot W_{ol} \quad 4.2. T_p \leq \mu_s \cdot W_1 \quad 4.3. F_{el} \geq 0 \quad 4.4. T_p \leq k \cdot A$$



Μονάδες 5

II) Χαρακτηρίστε σαν Σωστή ή Λανθασμένη, κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν.

- Δύο σώματα που βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους κινούνται κατακόρυφα υπό την επίδραση κατακόρυφου ιδανικού ελατήριου. Τα σώματα αυτά αποκλείεται να εκτελέσουν ολοκληρωμένη ταλάντωση.
- Όταν δύο σώματα βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, στερεωμένα στα άκρα οριζόντιου ελατήριου, είναι δυνατόν το ένα να ταλαντώνεται ενώ το άλλο να είναι ακίνητο, αν στο δεύτερο αναπτύσσεται τριβή.
- Αν σε ένα σώμα που εκτελεί AAT του ασκηθεί μια εξωτερική σταθερή δύναμη, τότε το σώμα εκτελεί νέα AAT με ίδια σταθερά επαναφοράς.
- Η ύπαρξη σταθερής εξωτερικής δύναμης μετατοπίζει τη ΘΙ της ταλάντωσης από το φυσικό μήκος του ελατήριου, μόνο εφόσον αυτό δεν είναι οριζόντιο.
- Ένα σύστημα δύο σωμάτων τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με τη βοήθεια οριζόντιου ιδανικού ελατήριου. Η δύναμη που προκαλεί την ταλάντωση του κάθε σώματος είναι η δύναμη του ελατήριου.

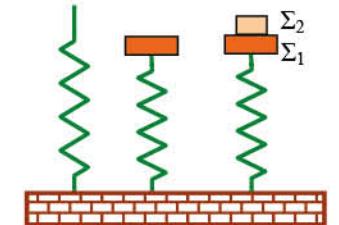
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

- B1. Ένα σώμα Σ_1 ισορροπεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου. Πάνω στο σώμα τοποθετώ ένα δεύτερο σώμα Σ_2 και αφήνω το σύστημα ελεύθερο να ταλαντώσει. Κατά την κίνηση των δύο σωμάτων δεν παρατηρείται απώλεια στη μηχανική ενέργεια του συστήματος. Αποκλείεται το πάνω σώμα να αναπηδήσει όποια και να είναι η σχέση μαζών των δύο σωμάτων.

Σωστό Λάθος

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

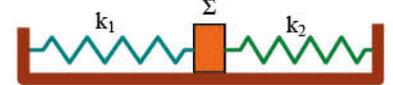


Μονάδες 12

- B2. Στο διπλανό σχήμα τα ελατήρια σταθεράς $k_1=k$ και $k_2=3k$ έχουν το ένα άκρο τους δεμένο σε ακλόνητο τοίχο και το άλλο δεμένο με το σώμα Σ μάζας m . Όταν το σύστημα ισορροπεί τα ελατήρια έχουν επιμηκυνθεί κατά Δl_1 και Δl_2 αντίστοιχα. Μετακινούμε το σώμα προς τα δεξιά μέχρι που να φτάσει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_2 , και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο. Το σώμα πραγματοποιεί AAT με ενέργεια E_1 . Κάποια στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο δεξιό άκρο της ταλάντωσης αφαιρούμε το ελατήριο σταθεράς k_2 χωρίς απώλεια ενέργειας και το σώμα νέα ταλάντωση με ενέργεια E_2 . Ο λόγος των ενέργειών των δύο ταλαντώσεων είναι ίσος με:

$$(i) E_1/E_2=1 \quad (ii) E_1/E_2=1/4 \quad (iii) E_1/E_2=1/16$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

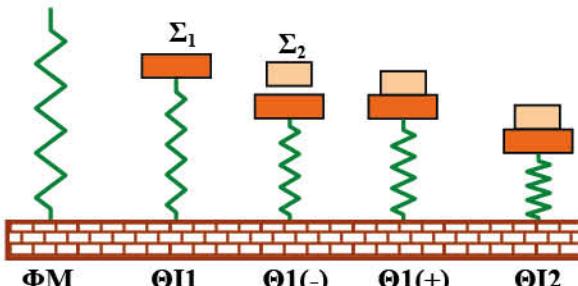


Μονάδες 13

ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Με σχόλια

1. Βασική άσκηση αναπήδησης

Ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ είναι κατακόρυφο και το κάτω του άκρο στηρίζεται σε οριζόντιο επίπεδο. Στο πάνω άκρο του είναι στερεωμένος δίσκος Σ_1 μάζας M που ηρεμεί. Ανυψώνουμε το δίσκο μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει το Φυσικό του Μήκος (ΦM) και τον αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί (θεωρούμε τη στιγμή αυτή σαν τη στιγμή $t=0$). Τη στιγμή, που ο δίσκος είναι στην κατώτερη θέση για δεύτερη φορά, αφήνουμε πάνω στο δίσκο ένα σώμα Σ_2 μάζας m οπότε το σύστημα εκτελεί μια νέα απλή αρμονική ταλάντωση. Το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι $L_0=80\text{cm}$, ενώ κατά την τελική ταλάντωση το μέγιστο και το ελάχιστο μήκος του ελατηρίου κατά τη δεύτερη ταλάντωση (ταλάντωση του συστήματος των δύο σωμάτων) είναι $L_{\max}=60\text{cm}$ και $L_{\min}=20\text{cm}$ αντίστοιχα.



A) Να βρείτε:

- A.1. Τις μάζες M και m του δίσκου και του σώματος.
- A.2. Το πλάτος A της τελικής ταλάντωσης των δύο σωμάτων.

B) Να γράψετε τις εξισώσεις και να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις:

- B.1. Του ύψους h από το έδαφος που βρίσκεται ο δίσκος Σ_1 , σε συνάρτηση με το χρόνο t .

- B.2. Της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_2 από τον δίσκο σε συνάρτηση με το ύψος h .

Γ) Να βρείτε το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος ώστε να ολοκληρώσει τη ταλάντωσή του χωρίς να αναπηδήσει το σώμα Σ_2 .

Δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που θα έπρεπε να έχει το σώμα Σ_2 κατά την κρούση του με τον δίσκο, ώστε το σύστημα να ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος.

Δίνεται $g=10\text{m/sec}^2$.

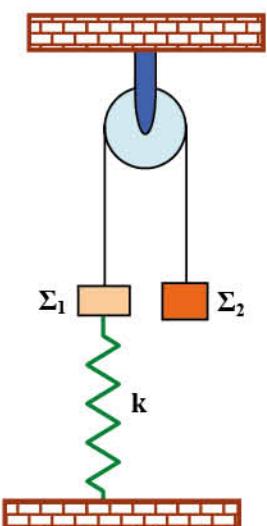
Σχόλια:

1. Στην άσκηση αυτή επαναφέρονται βασικές έννοιες ταλάντωσης με ελατήριο, όπως:
 - a) Οι έννοιες «φυσικό μήκος ελατηρίου» και «θέση ισορροπίας» της ταλάντωσης.
 - b) Οι έννοιες μέγιστο και ελάχιστο μήκος του ελατηρίου.
- 2) Στην άσκηση παρουσιάζεται η έννοια της αναπήδησης σώματος κατά την διάρκεια της ταλάντωσης.
- 3) Να δοθεί προσοχή στην κατανόηση της συνθήκης ταλάντωσης των δύο σωμάτων ώστε να ολοκληρωθεί η ταλάντωσή τους.
- 4) Να δοθεί προσοχή στις έννοιες "σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης σώματος" και "σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του συστήματος".

2. Σύνθετη άσκηση αναπήδησης

Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1=1\text{Kgr}$ και $m_2=3\text{Kgr}$ αντίστοιχα, ισορροπούν με τη βοήθεια κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους $L_0=0,9\text{m}$ και αβαρούς τροχαλίας. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο, οπότε το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $d=10\text{cm}$, ενώ τα δύο σώματα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Απομακρύνουμε το σώμα Σ_2 προς τα κάτω, μέχρι που τα δύο σώματα να βρεθούν σε υψομετρική διαφορά $h=0,4\text{m}$.

- A) Να υπολογίσετε τη σταθερά του ελατηρίου k .
- B) Να υπολογίσετε την ενέργεια W που δαπανήσαμε προκειμένου τα δύο σώματα να βρεθούν σε υψομετρική διαφορά h .
- Γ). Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να ταλαντωθεί.
 - G.1. Να δείξετε ότι το σώμα Σ_2 θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.
 - G.2. Να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης E του Σ_2 .



ϕ_0 : αρχική φάση

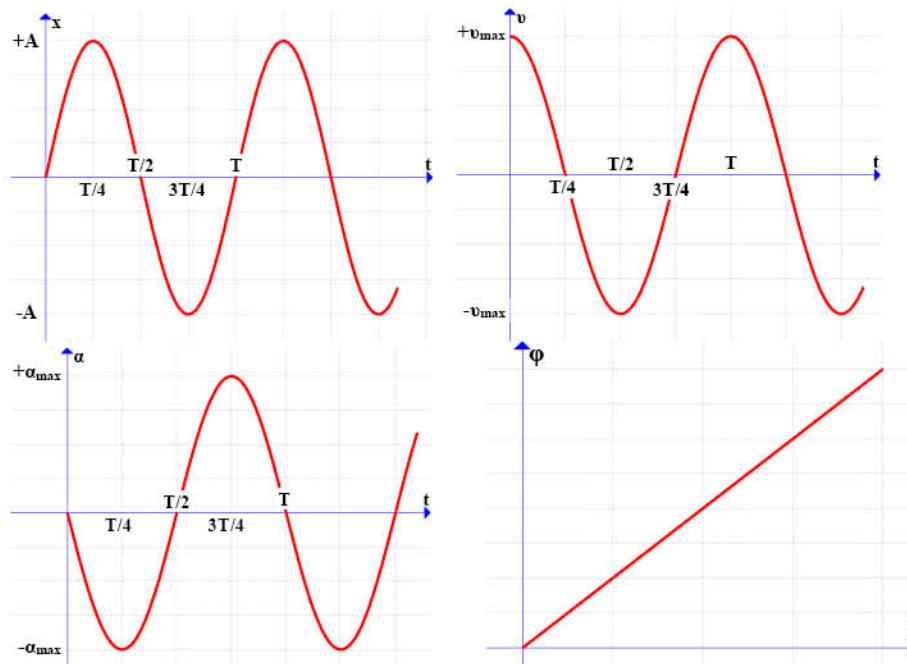
$$\phi = \omega \cdot t + \phi_0 : \text{φάση}$$

Συγκρίνοντας τις φάσεις των εξισώσεων μετατόπισης – ταχύτητας – επιτάχυνσης παρατηρούμε ότι:

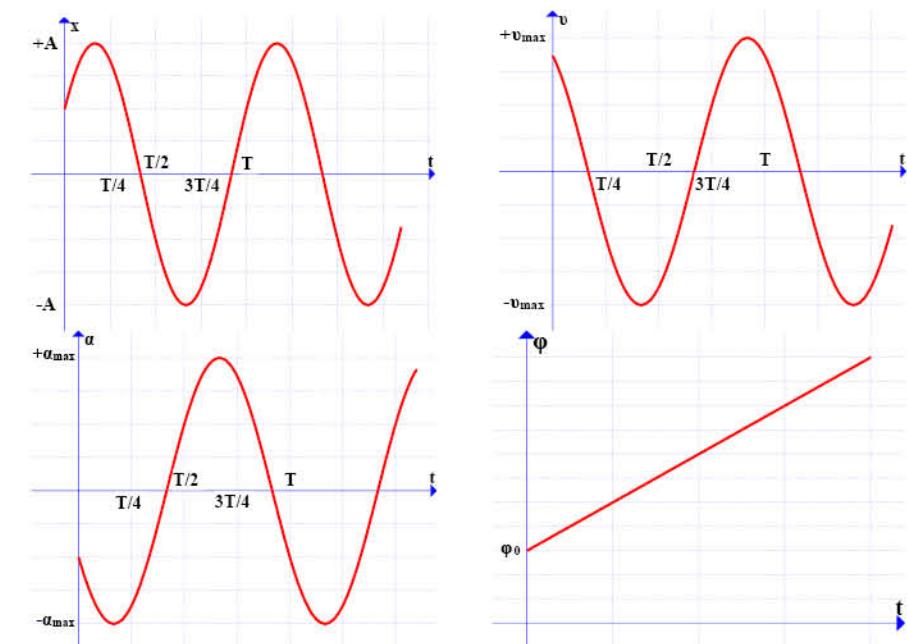
- ✓ η ταχύτητα προηγείται σε φάση της απομάκρυνσης κατά $\pi/2$ rad.
- ✓ η επιτάχυνση προηγείται σε φάση της ταχύτητας κατά $\pi/2$ rad.
- ✓ η απομάκρυνση υπολείπεται της επιτάχυνσης κατά π rad.

Έτσι η διαφορά φάσης απομάκρυνσης - ταχύτητας είναι $\Delta\phi_{x-v} = -\pi/2$ rad
 ή η διαφορά φάσης επιτάχυνσης - απομάκρυνσης είναι $\Delta\phi_{a-x} = +\pi$ rad

☞ Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών συναρτήσει του χρόνου αν $\phi_0=0$ είναι:

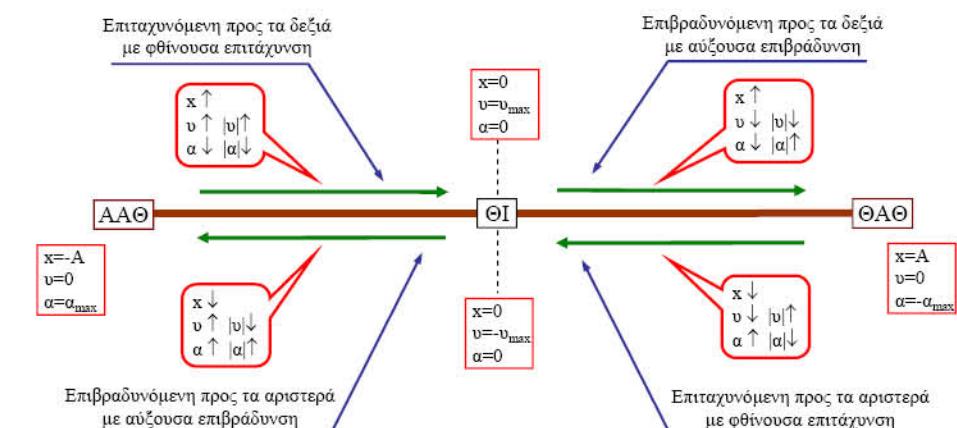


Αν $\phi_0 \neq 0$ οι γραφικές παραστάσεις έχουν τη μορφή:



To είδος της κίνησης

Στο σχήμα που ακολουθεί περιγράφεται η μεταβολή των κινητικών μεγεθών (x, v και a) σε μια ταλάντωση.



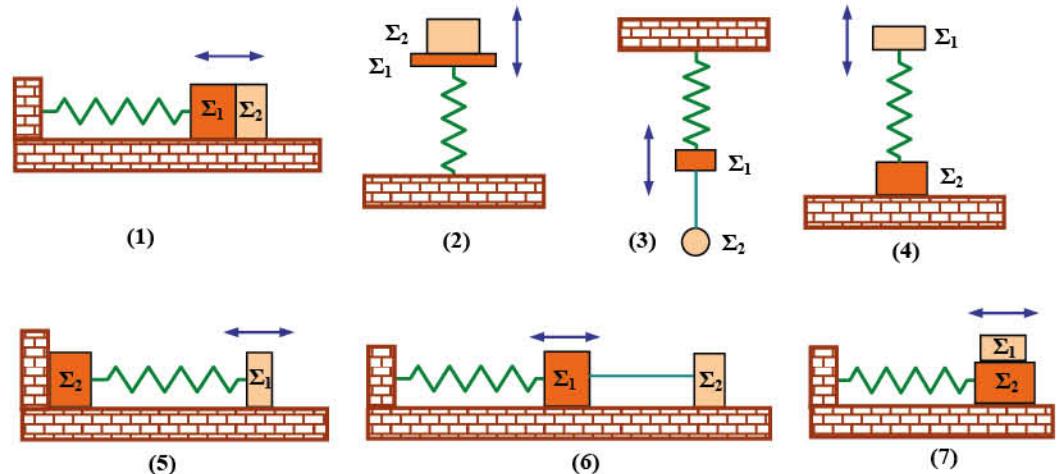
ΘΙ : Θέση Ισορροπίας

ΘΑΘ : Θετική Ακραία Θέση (+A)

ΑΑΘ : Αρνητική Ακραία Θέση (-A)

ΘΕΩΡΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. Γενικά



Ενδεικτικά για την αναπήδηση έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Στην (1) ζητείται το σημείο της ταλάντωσης που σταματά η επαφή μεταξύ των Σ_1 και Σ_2 .
2. Στην (2) ζητείται το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης ώστε να μην αναπηδήσει το Σ_2 .
3. Στην (3) ζητείται το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης ώστε το νήμα μεταξύ των Σ_1 και Σ_2 να συνεχίσει να είναι τεντωμένο.
4. Στην (4) ζητείται το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης του Σ_1 , ώστε να μην ανασηκωθεί το Σ_2 .
5. Στην (5) ζητείται το σημείο της ταλάντωσης του Σ_1 στο οποίο αρχίζει να κινείται το Σ_2 .
6. Στην (6) ζητείται το σημείο ταλάντωσης του συστήματος, στο οποίο το νήμα παύει να είναι τεντωμένο.
7. Στην (7) ζητείται το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης των δύο σωμάτων, ώστε να μην ολισθήσει το ένα πάνω στο άλλο.

B. Αναπήδηση σώματος Ολίσθιση σώματος

3) Ζητούνται ή δίνονται οι γραφικές παραστάσεις $K, U = f(t)$

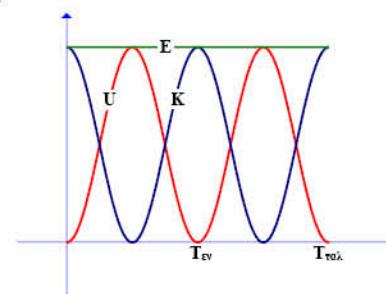
Απαραίτητες γνώσεις

Αν $\phi_0 = 0 \text{ rad}$ οι εξισώσεις των ενεργειών είναι:

$$U = E \cdot \eta \mu^2 (\omega \cdot t)$$

$$K = E \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$$

Οι γραφικές παραστάσεις είναι αυτές του διπλανού σχήματος. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα, $T_{ev} = T/2$.



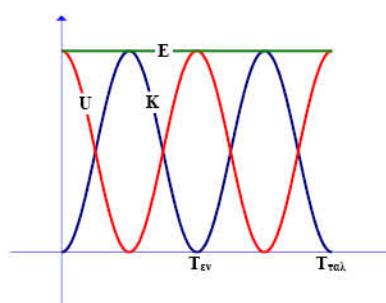
Προσοχή : Ολόκληρη η γραφική παράσταση είναι πάνω από τον οριζόντιο άξονα (του t).

Αν $\phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$ οι εξισώσεις των ενεργειών είναι:

$$U = E \cdot \eta \mu^2 (\omega \cdot t + \pi/2) = E \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \pi/2)$$

$$K = E \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \pi/2) = E \cdot \eta \mu^2 (\omega \cdot t)$$

Οι γραφικές παραστάσεις είναι αυτές του διπλανού σχήματος. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα, $T_{ev} = T/2$.



Προσοχή : Ολόκληρη η γραφική παράσταση είναι πάνω από τον οριζόντιο άξονα (του t).

A) Αν δίνεται η εξίσωση και ζητείται η αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Μέθοδος

- Φέρνουμε την εξίσωση στην κατάλληλη μορφή (ως προς τον τριγωνομετρικό αριθμό).
- Με αντιπαραβολή βρίσκουμε E , ω και ϕ_0 .
- Δημιουργούμε την γραφική παράσταση του τετραγώνου της τριγωνομετρικής εξίσωσης.
- Μετακινούμε τον κατακόρυφο άξονα προς τα δεξιά κατά $T/4$ αν η αρχική φάση είναι $\pi/2$.
- Σημειώνουμε τιμές στους άξονες.

B) Αν δίνεται η γραφική παράσταση και ζητείται η αντίστοιχη εξίσωση.

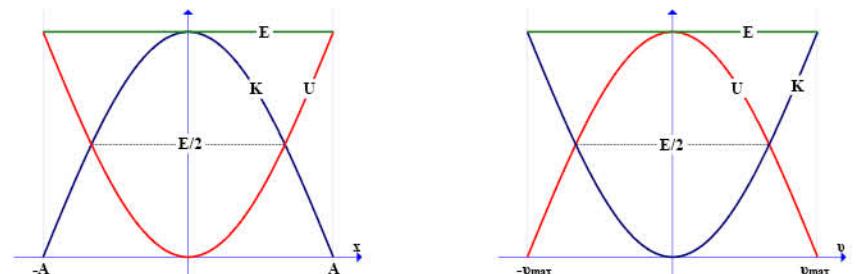
Μέθοδος

- Από την γραφική παράσταση βρίσκουμε την περίοδο T και την τιμή της ενέργειας της ταλάντωσης E .
- Από την περίοδο υπολογίζουμε την κυκλική συχνότητα ω .
- Από την ενέργεια της ταλάντωσης E και από δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε το πλάτος A .
- Από την τιμή της συνάρτησης τη στιγμή $t=0$ συμπεραίνουμε την αρχική φάση ϕ_0 (Αν $U=0 \Leftrightarrow \phi_0=0$ ενώ αν $U=E \Leftrightarrow \phi_0=\pi/2 \text{ rad}$).

4) Ζητούνται ή δίνονται οι γραφικές παραστάσεις $K, U = f(x)$ ή $f(v)$

Απαραίτητες γνώσεις

Οι γραφικές αυτές παραστάσεις δεν επηρεάζονται από την ύπαρξη ή όχι αρχικής φάσης. Είναι συναρτήσεις $2^{\text{ου}}$ βαθμού και η μορφή τους είναι καμπύλη.



Οι εξισώσεις των ενεργειών είναι:

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E - \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 = E - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

A) Αν δίνεται η εξίσωση και ζητείται η αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Μέθοδος

- Βρίσκουμε τις τιμές του πλάτους A ή της v_{\max} .
- Βρίσκουμε την ενέργεια ταλάντωσης.
- Σημειώνουμε τα σημεία που αντιστοιχούν σε $x=0$ και $x=\pm A$.
- Ενώνουμε τα σημεία με καμπύλη.