Περιεχόμενα

1. Γραμμικά Συστήματα

Ερωτήσεις Θεωρίας

1.1 Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση;

Απάντηση:

Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\alpha x+\beta y=\gamma \text{ με } \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0.$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x+3y=6$ είναι γραμμική.

1.2 Τι παριστάνει στο επίπεδο η γραμμική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$;

Απάντηση:

Η γραμμική εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο ευθεία γραμμή.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται

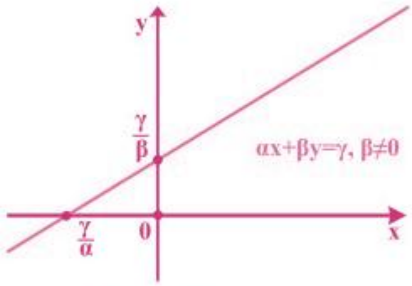
$$\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Επομένως η εξίσωση παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $\left(0, \frac{\gamma}{\beta}\right)$.

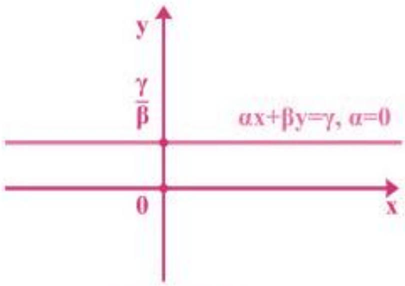
Ειδικότερα:

✓ Αν $\alpha \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες (Σχ. α), ενώ

✓ Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = \dfrac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $\left(0, \dfrac{\gamma}{\beta}\right)$ (Σχ. β).



Σχήμα α

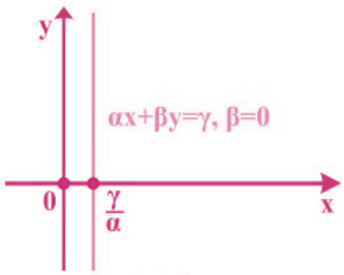


Σχήμα β

• $\beta = 0$ (οπότε $\alpha \neq 0$), τότε η εξίσωση γράφεται

$$\alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

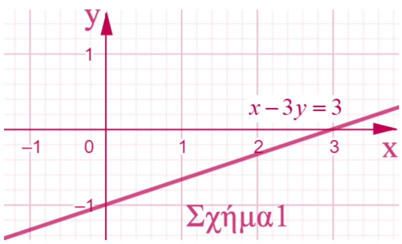
Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον x΄x στο σημείο $\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$ (Σχ. γ).



Σχήμα γ

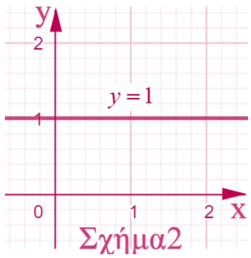
Για παράδειγμα:

1) Η εξίσωση $x - 3y = 3$ παίρνει τη μορφή $y = \dfrac{1}{3}x - 1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{1}{3}$ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0, -1)$ (Σχ. 1).



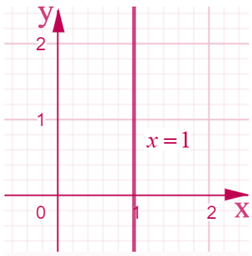
Σχήμα1

2) Η εξίσωση $y=1$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x στο σημείο $(0,1)$ (Σχ. 2).



Σχήμα2

3) Η εξίσωση $x=1$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y στο σημείο $(1,0)$ (Σχ. 3).



Σχήμα3

1.3 Τι ονομάζουμε λύση μιας γραμμικής εξίσωσης;

Απάντηση:

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση της γραμμικής εξίσωσης**.

Για παράδειγμα, το ζεύγος $(-1,1)$ είναι λύση της εξίσωσης $-4x+y=5$, γιατί $-4(-1)+1=5$. Επίσης και το ζεύγος $(1,9)$ είναι λύση της εξίσωσης $-4x+y=5$, γιατί $-4\cdot1+9=5$. Γενικά κάθε ζεύγος που έχει τη μορφή: $(\kappa,\ 4\kappa+5)$, με $\kappa\in\mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης.

1.4 Τι ονομάζουμε λύση ενός γραμμικού συστήματος 2x2;

Απάντηση:

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις:

$$\alpha x+\beta y=\gamma \text{ και } \alpha' x+\beta' y=\gamma'$$

και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 και γράφουμε:

$$\begin{cases}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$$

Κάθε ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**.

<u>Σχόλιο:</u>
*Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλο γραμμικό σύστημα το οποίο έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Τα δύο αυτά γραμμικά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα**.*

1.5 Ποιες είναι οι βασικές μέθοδοι για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2x2;

Απάντηση:

Οι βασικές μέθοδοι που μάθαμε στο Γυμνάσιο είναι η μέθοδος της **αντικατάστασης** και η μέθοδος των **αντίθετων συντελεστών** (ή μέθοδος της απαλοιφής).

1) Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο. Π.χ. στο σύστημα:

$$\begin{cases} x+2y=4 \ (1) \\ 3x-y=5 \ (2) \end{cases}$$

λύνουμε την (1) ως προς x. Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x=4-2y \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην (2) εξίσωση το x με την παράσταση που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$3(4-2y)-y=5 \Leftrightarrow 12-6y-y=5 \Leftrightarrow 12-5=7y \Leftrightarrow y=1$$

Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x=4-2y \\ y=1 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του y στην (1) και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο

$$x=4-2\cdot 1=2$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(2, 1)$.

2) Μέθοδος αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases} \left| \begin{matrix} \\ \cdot 2 \end{matrix} \right. \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} x+2y=4 \\ 6x-2y=10 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε:

$$x+6x+2y-2y=4+10 \Leftrightarrow 7x=14 \Leftrightarrow x=2.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή του άλλου:

$$3\cdot 2-y=5 \Leftrightarrow 6-5=y \Leftrightarrow y=1.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(2, 1)$.

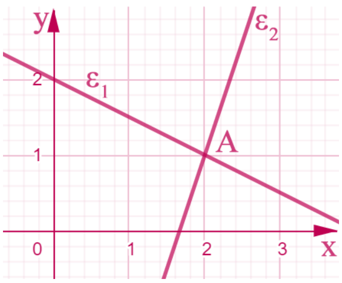
<u>1.6</u> Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία ενός γραμμικού συστήματος 2x2;

<u>Απάντηση</u>:

Οι δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2x2 παριστάνουν δύο ευθείες οι οποίες μπορεί να **τέμνονται** ή να είναι **παράλληλες** ή ακόμα και να **συμπίπτουν**.

Για παράδειγμα:

✓ Το σύστημα $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ το λύσαμε προηγουμένως και βρήκαμε ότι έχει μοναδική λύση την $(2, 1)$. Άρα οι ευθείες $\varepsilon_1 : x+2y=4$ και $\varepsilon_2 : 3x-y=5$ έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και συνεπώς τέμνονται στο σημείο $A(2, 1)$.



Είναι $\varepsilon_1 : y=-\frac{1}{2}x+2$, με $\lambda_1=-\frac{1}{2}$

$\varepsilon_2 : y=3x-5$, με $\lambda_2=3$.

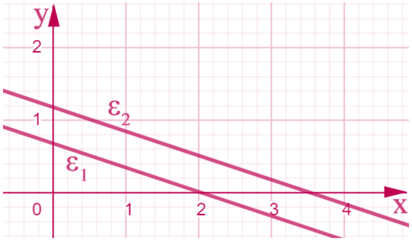
✓ Το σύστημα $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=7 \end{cases}$ είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=7 \end{cases} \Bigg| \cdot -2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-6y=-4 \\ 2x+6y=7 \end{cases}$$

και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $0=3$ που είναι αδύνατο.
Άρα οι ευθείες $\varepsilon_1 : x+3y=2$ και $\varepsilon_2 : 2x+6y=7$ έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=\lambda_2$ και συνεπώς είναι παράλληλες.

Είναι $\varepsilon_1 : y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, με $\lambda_1=-\frac{1}{3}$

$\varepsilon_2 : y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{6}$, με $\lambda_2=-\frac{1}{3}$.



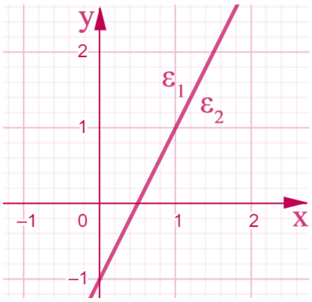
✓ Το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 6x-3y=3 \end{cases}$ είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 6x-3y=3 \end{cases} \Bigg| \cdot -3 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+3y=-3 \\ 6x-3y=3 \end{cases}$$

και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $0=0$ που έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Άρα οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x-y=1$ και $\varepsilon_2 : 6x-3y=3$ συμπίπτουν.

Είναι $\varepsilon_1 : y=2x-1$ και

$\varepsilon_2 : y=2x-1$.



Ασκήσεις για λύση

1.27 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 4x-3y=-1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ -5x+6y=-21 \end{cases}$

1.28 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{2}=\dfrac{1}{4} \\ x+3y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y-1}{2}=8 \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+1}{2}=9 \end{cases}$

1.29 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1 \\ -2x+5y=2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}+\dfrac{y+2}{3}=0 \\ \dfrac{x+5}{3}=y+1 \end{cases}$

1.30 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 4(x+y)=12-3(x-y) \\ 2(x-y)=6-3(x+y) \end{cases}$ β) $\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2=x^2+y^2+5 \\ (x+1)^3-3x^2+4y=x^3+2 \end{cases}$

1.31 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \sqrt{5}\cdot x+4y=\sqrt{5}-1 \\ -x+y=\sqrt{5} \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+2\sqrt{3}y=1 \\ \sqrt{3}\cdot x+6y=3\sqrt{3} \end{cases}$

1.32 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x-3y+1)^2+(4x+y-5)^2=0$

β) $|x+5y-11|+|7x+3y-13|=0$

1.33 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y+\omega=0 \\ 2x+5y-\omega=-3 \\ 4x-7y+3\omega=-1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x-2y+\omega=3 \\ 2x+y-\omega=5 \\ 6x-7y+3\omega=10 \end{cases}$

1.34 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+\omega=2 \\ \omega+x=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{\omega}{4} \\ 3x+2y-\omega=16 \end{cases}$

1.35 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+3y+\omega=2 \\ x+3y-\omega=6 \\ 4x-3y+\omega=9 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x+y+\omega=2 \\ x+2y+\omega=7 \\ x+y+2\omega=3 \end{cases}$

1.36 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\begin{vmatrix} x+4 & 4x \\ x-2 & x \end{vmatrix}=0$ β) $\begin{vmatrix} 2x-7 & 1 \\ -3 & x \end{vmatrix}=0$

1.37 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\begin{vmatrix} x-1 & 2x-2 \\ x+1 & 3x \end{vmatrix}\le 0$ β) $\begin{vmatrix} x & x+3 \\ 3 & x+1 \end{vmatrix}<\begin{vmatrix} 2x+3 & 8 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix}$

1.38 Να λύσετε τα συστήματα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) $\begin{cases} \lambda x-y=-5 \\ x-y=1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \lambda x+y=2 \\ 4x+\lambda y=\lambda \end{cases}$

1.39 Να λύσετε τα συστήματα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) $\begin{cases} \lambda^2 x+y=\lambda+1 \\ \lambda x+y=2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (\lambda-1)x+y=2\lambda-2 \\ x+(\lambda-1)y=\lambda \end{cases}$

1.40 Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x+5y=2 \\ x+3y=\lambda \ \ \mu\varepsilon\ \lambda\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x_0,\ y_0)$ και στη συνέχεια να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $|y_0-x_0|<6$.

1.51 Τ.Θ. (#15011)

Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

α) i. Δίνονται οι εξισώσεις: 1. $y = 15 - x$ 2. $y - x = 15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y.

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €. Δίνονται ακόμα, οι εξισώσεις:

3. $50y - 20x = 480$ 4. $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y.

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας.

1.52 Ένα αυτοκίνητο μετά την ενεργοποίηση των φρένων του συνέχιζε να κινείται με ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$, όπου t ο χρόνος που μεσολάβησε από τη στιγμή του φρεναρίσματος. Αν 2 sec μετά το φρενάρισμα το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα 12 m/sec και 2 sec αργότερα είχε ταχύτητα 4 m/sec, να βρείτε την αρχική ταχύτητα υ_0 και την επιβράδυνση α. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή του φρεναρίσματος θα σταματήσει το αυτοκίνητο;